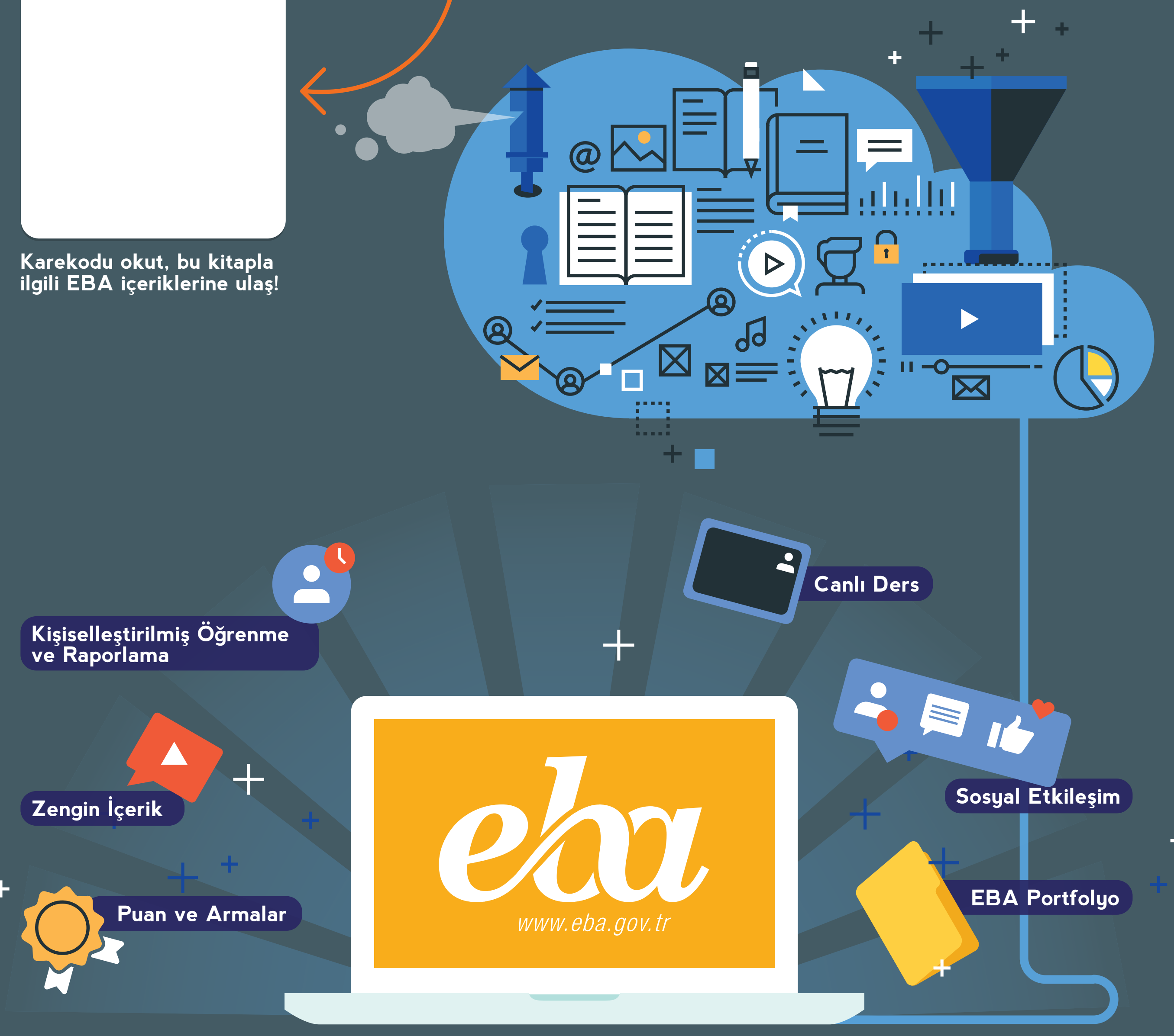
Bu kitaba sığmayan daha neler var!

Karekodu okut, bu kitapla ilgili EBA içeriklerine ulaş!



BU DERS KİTABI MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞINCA ÜCRETSİZ OLARAK VERİLMİŞTİR.
PARA İLE SATILAMAZ.

Bandrol Uygulamasına İlişkin Usul ve Esaslar Hakkında Yönetmeliğin Beşinci Maddesinin İkinci Fıkrası Çerçevesinde Bandrol Taşıması Zorunlu Değildir.

MESLEKİ EĞİTİM MERKEZLERİ MATEMATİK DERSİ KİTABI 9

MESLEKİ EĞİTİM MERKEZLERİ

MATEMATİK 9
DERSİ KİTABI

MESLEKİ EĞİTİM MERKEZLERİ

MATEMATİK

9

DERS KİTABI

YAZARLAR

Gökhan GÜNEŞ
Melike KARABULUT
Vedat GÜLMEZ
Volkan KILIÇ

DEVLET KİTAPLARI

MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI YAYINLARI...:
YARDIMCI VE KAYNAK KİTAPLAR DİZİSİ..:

HAZIRLAYANLAR

EDİTÖR:	Prof. Dr. Ali GÜVEN
DİL UZMANI:	Levent BAŞARKANOĞLU
PROGRAM GELİŞTİRME UZMANI:	Prof. Dr. Erdoğan TEZCİ
REHBERLİK VE GELİŞİM UZMANI:	İlyas TİPİ
GÖRSEL TASARIM UZMANI:	Sertan AKSAKAL
GRAFİK TASARIM UZMANI:	Hacer ÖZÇELİK

Millî Eğitim Bakanlığının 21.12.2020 gün ve 18433886 sayılı oluru ile Meslekî ve Teknik Eğitim Genel Müdürlüğünce öğretim materyali olarak hazırlanmıştır.

İSTİKLÂL MARŞI

Korkma, sönmez bu şafaklarda yüzen al sancak;
Sönmeden yurdumun üstünde tüten en son ocak.
O benim milletimin yıldızıdır, parlayacak;
O benimdir, o benim milletimindir ancak.

Çatma, kurban olayım, çehreni ey nazlı hilâl!
Kahraman ırkıma bir gül! Ne bu şiddet, bu celâl?
Sana olmaz dökülen kanlarımız sonra helâl.
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl.

Ben ezelden beridir hür yaşadım, hür yaşarım.
Hangi çılgın bana zincir vuracakmış? Şaşarım!
Kükremiş sel gibiyim, bendimi çiğner, aşarım.
Yırtarım dağları, enginlere sığmam, taşarım.

Garbın âfâkını sarmışsa çelik zırhlı duvar,
Benim iman dolu göğsüm gibi serhaddim var.
Ulusun, korkma! Nasıl böyle bir imanı boğar,
Medeniyyet dediğin tek dişi kalmış canavar?

Arkadaş, yurduma alçakları uğratma sakın;
Siper et gövdeni, dursun bu hayâsızca akın.
Doğacaktır sana va'dettiği günler Hakk'ın;
Kim bilir, belki yarın, belki yarından da yakın.

Bastığın yerleri toprak diyerek geçme, tanı:
Düşün altındaki binlerce kefensiz yatanı.
Sen şehit oğlusun, incitme, yazıktır, atanı:
Verme, dünyaları alsan da bu cennet vatanı.

Kim bu cennet vatanın uğruna olmaz ki feda?
Şüheda fışkıracak toprağı sıksan, şüheda!
Cânı, cânânı, bütün varımı alsın da Huda,
Etmesin tek vatanımdan beni dünyada cüda.

Ruhumun senden İlâhî, şudur ancak emeli:
Değmesin mabedimin göğsüne nâmahrem eli.
Bu ezanlar -ki şehadetleri dinin temeli-
Ebedî yurdumun üstünde benim inlemeli.

O zaman vecd ile bin secde eder -varsa- taşım,
Her cerîhamdan İlâhî, boşanıp kanlı yaşım,
Fışkırır ruh-ı mücerret gibi yerden na'şım;
O zaman yükselerek arşa değer belki başım.

Dalgalan sen de şafaklar gibi ey şanlı hilâl!
Olsun artık dökülen kanlarımın hepsi helâl.
Ebediyyen sana yok, ırkıma yok izmihlâl;
Hakkıdır hür yaşamış bayrağımın hürriyyet;
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl!

Mehmet Âkif Ersoy

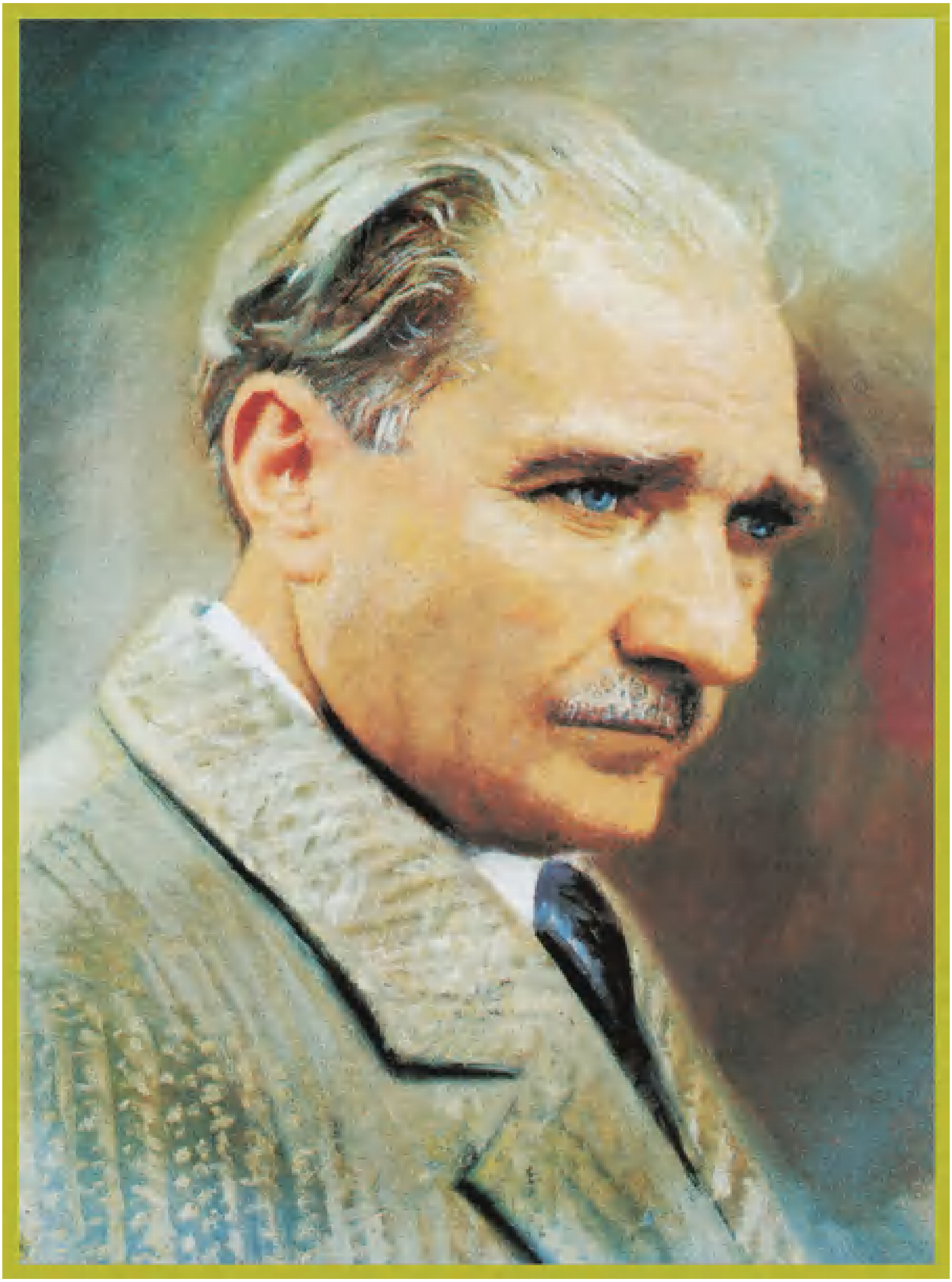
GENÇLİĞE HİTABE

Ey Türk gençliği! Birinci vazifen, Türk istiklâlini, Türk Cumhuriyetini, ilelebet muhafaza ve müdafaa etmektir.

Mevcudiyetinin ve istikbalinin yegâne temeli budur. Bu temel, senin en kıymetli hazinendir. İstikbalde dahi, seni bu hazineden mahrum etmek isteyecek dâhilî ve hâricî bedhahların olacaktır. Bir gün, istiklâl ve cumhuriyeti müdafaa mecburiyetine düşersen, vazifeye atılmak için, içinde bulunacağın vaziyetin imkân ve şeraitini düşünmeyeceksin! Bu imkân ve şerait, çok namüsait bir mahiyette tezahür edebilir. İstiklâl ve cumhuriyetine kastedecek düşmanlar, bütün dünyada emsali görülmemiş bir galibiyetin mümessili olabilirler. Cebren ve hile ile aziz vatanın bütün kaleleri zapt edilmiş, bütün tersanelerine girilmiş, bütün orduları dağıtılmış ve memleketin her köşesi bilfiil işgal edilmiş olabilir. Bütün bu şeraitten daha elîm ve daha vahim olmak üzere, memleketin dâhilinde iktidara sahip olanlar gaflet ve dalâlet ve hattâ hıyanet içinde bulunabilirler. Hattâ bu iktidar sahipleri şahsî menfaatlerini, müstevlîlerin siyasî emelleriyle tevhit edebilirler. Millet, fakr u zaruret içinde harap ve bîtap düşmüş olabilir.

Ey Türk istikbalinin evlâdı! İşte, bu ahval ve şerait içinde dahi vazifen, Türk istiklâl ve cumhuriyetini kurtarmaktır. Muhtaç olduğun kudret, damarlarındaki asil kanda mevcuttur.

Mustafa Kemal Atatürk



MUSTAFA KEMAL ATATÜRK

İÇİNDEKİLER

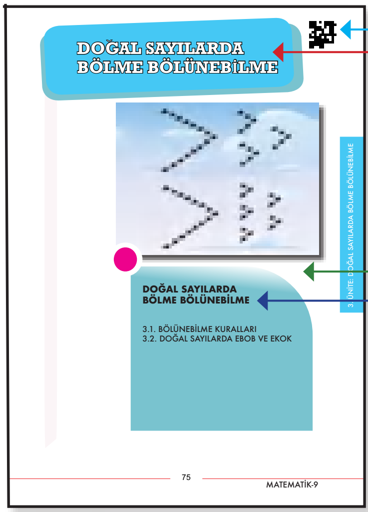
1.ÜNİTE **MANTIK**

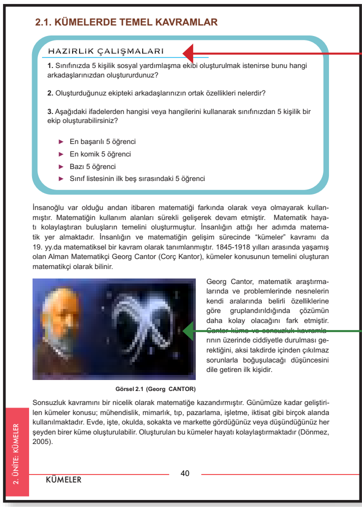
2.ÜNİTE **KÜMELER**

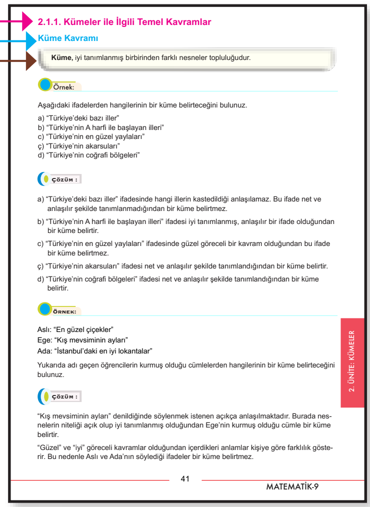
3.ÜNİTE **DOĞAL SAYILARDA BÖLME BÖLÜNEBİLME**

4.ÜNİTE **DENKLEMLER**

KİTABIN TANITIMI







Ünite içeriklerine sahip olan karekodu gösterir.

Ünite ile ilgili kazanım başlıklarını gösterir.

Konu ile ilgili kazanım başlıklarını gösterir.

Konu ile ilgili alt başlıkları gösterir.

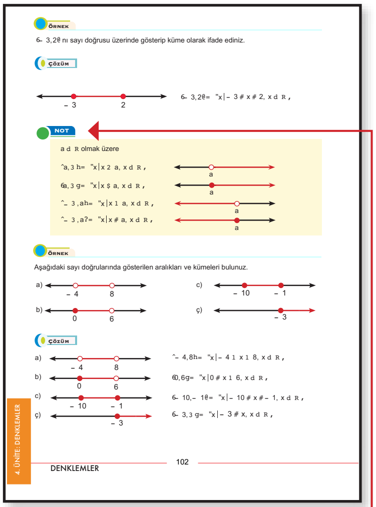
Ünite kapağı sayfasını gösterir.

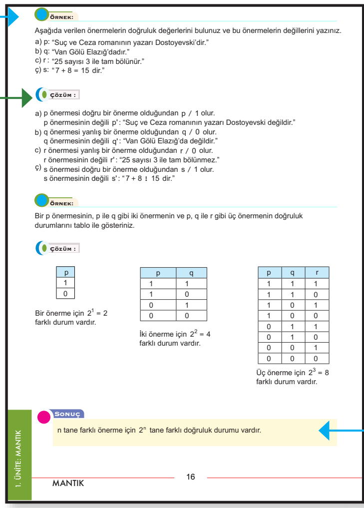
Öğrencilerin konuya hazırbulunuşluk düzeylerini ölçmeye yarayan soruları gösterir.

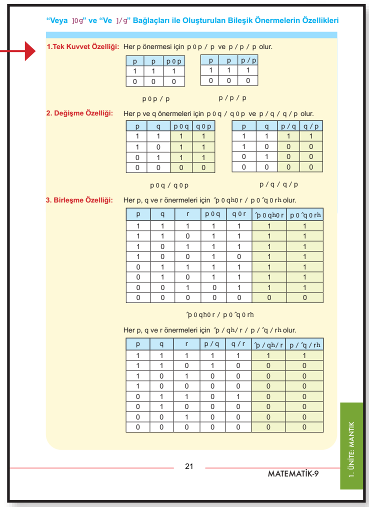
Konu ile ilgili tanımları gösterir.

Ünitenin adını gösterir.

Ünitenin içeriğine uygun görseli gösterir.

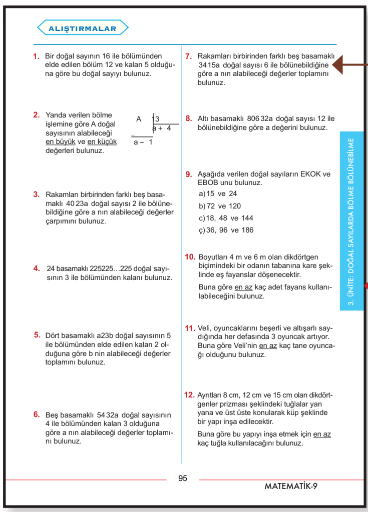






Konu ile ilgili dikkat edilmesi gereken temel bilgileri gösterir.

Konu ile ilgili özellikleri gösterir.



Örnek soru çözümü sonrası elde edilen sonuçları gösterir.

Konu ile ilgili örnek soruları gösterir.

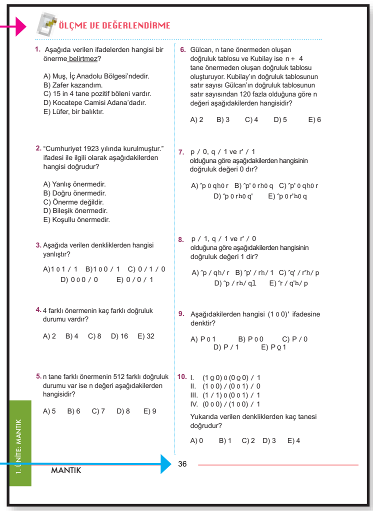
Konu ile ilgili örnek soruların çözümlerini gösterir.

Öğrenilen konuları pekiştirme yapmayı sağlayacak soruları gösterir.

Öğrenilen konularla ilgili öğrenilen bilgileri değerlendirme amacıyla hazırlanan soruları gösterir

Ünite adı ve sayısını gösterir.

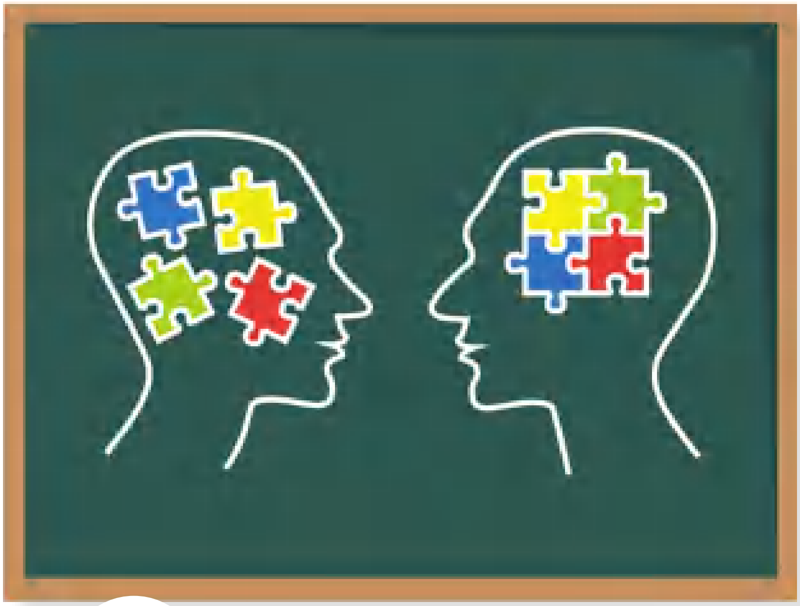
Sayfa numarasını gösterir.



SEMBOL VE GÖSTERİMLER

p	p önermesi
$p', \sim p$	p önermesinin değili
$\vee$	veya
$\wedge$	ve
$\veebar$	ya da
$\Rightarrow$	ise
$\Leftrightarrow$	ancak ve ancak
$\exists$	bazı
$\forall$	her
$\equiv$	denk
$=$	eşit
$\neq$	eşit değil
$\in$	elemanı
$\notin$	elemanı değil
$\varnothing, \{\ \}$	boş küme
$\subset$	alt küme
$\subseteq$	eşit veya alt küme
$\supset$	kapsar
$\supseteq$	eşit veya kapsar
$\nsubseteq$	eşit veya alt küme değil
$\nsupseteq$	eşit veya kapsar değil
$s(A)$	A kümesinin eleman sayısı
E	evrensel küme
$\cup$	birleşim
$\cap$	kesişim
$A - B$	A kümesinin B kümesinden farkı
A'	A kümesinin tümleyeni
$<$	küçük
$\leq$	küçük veya eşit
$>$	büyük
$\geq$	büyük veya eşit
$\mathbb{N}$	doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	gerçek sayılar kümesi
$\mathbb{R}^-$	negatif gerçek sayılar kümesi
$[a, b]$	kapalı aralık
(a, b)	açık aralık
$[a, b)$	yarı açık aralık
$(a, b]$	yarı açık aralık
$\lvert x \rvert$	x gerçek sayısının mutlak değeri

MANTIK



MANTIK

1. 1. ÖNERMELER VE BİLEŞİK ÖNERMELER

1.1. ÖNERMELER VE BİLEŞİK ÖNERMELER

HAZIRLIK ÇALIŞMALARI

1. Sena, babasından akşam eve gelirken matematik veya geometri kitabı almasını istiyor. Sena'nın isteği hangi koşullarda gerçekleşmiş olabilir?

2. Arda, annesinden börek ya da pasta yapmasını istiyor.
Arda'nın isteği hangi koşullarda gerçekleşmiş olabilir?

3. Kürşat, spor akademisine gitmek istemektedir. Üniversite sınavından yeterli puan alıp spor akademisine başvuru yapar. Başvurusu kabul edilen Kürşat'a ön eleme sınavında 100 metre koşusunu verilen sürede tamamlaması gerektiği söylenir. Ön eleme sınavından elenen Kürşat'a elenme gerekçesi olarak şöyle bir yazı verilir. "*Aday öğrencilerimiz 100 metre koşusunu 13.20 saniyeden daha kısa sürede bitiremez ise kesin kayıt hakkı kazanamazlar*."

Kürşat'ın spor akademisine kesin kayıt yaptırma şartları neler olabilir?

Mantık, "doğru düşünmenin kaidelerini ortaya koyan ilimdir." diye tarif edilir. Düşüncemizin normal işleyişini psikoloji ilmi anlatmaktadır. Ancak duygu ve irade olayları mantığı ilgilendirmez. Şu hâlde duygu ve irade olayları dışarda kalarak, sade zihin olayları üzerinde yaptığımız araştırmalarla, düşünmenin ilmini yapmış oluyoruz. Mantığın psikoloji ile ilgisi işte bu noktada kendini göstermektedir. Çünkü zihnin hakikate ulaşmak gayesiyle ne yolda işletilmesi gerektiğini bilmek için, onun kendiliğinden nasıl işlemekte olduğunu bilmek lüzumludur.

Görsel 1.1 (Nurettin TOPÇU)

Bu sebepten, bazıları mantığın "zekâ psikolojisi" olduğunu söyler. Ancak psikolojide anormal hâller, yani şuurun hastalık hâlleri de incelendiği hâlde, mantık zihnin yalnız normal işleyişini incelemek iddiasındadır. Şu hâlde "Mantık, normal zekânın psikolojisidir." demek daha doğru olacaktır. Böylelikle mantığın psikolojiden ibaret olduğu görülse de hakikatte bu iki ilim birbirinden ayrıdır. Zira psikoloji, şuur hâllerini oldukları gibi ele almakta ve ulaşılması gerekli olan herhangi bir gayeyi göz önünde tutmamaktadır. Mantıkta ise hakikate ulaşmak gayesi güdülür. Hakikate ulaşmak için zihnin gelişigüzel işlemesi kâfi değildir. (Topçu, 2006).

Gottfried Wilhelm LEİBNİZ (Gotfrid Vilhelm Laypnis, 1646-1716)

Görsel 1.2 (G. Wilheim LEİBNİZ)

1646'da Leipzig şehrinde (şimdiki Almanya) doğar. 14 yaşından 21 yaşına kadar hukuk ve felsefe eğitimi görür. 1672'de Paris'e gidene kadar Galileo (Galile), Descartes (Dekart), Pascal (Paskal) ve Hobbes (Habs) gibi isimlerle kendini hissettiren "yeni felsefe" den habersizdir. 1672'den 1676'ya kadar ikamet ettiği Paris'te bulduğu entelektüel ortamdan etkilenir. Matematik, bilim ve felsefenin temel taşlarını bu yıllarda atar. 1676'nın Aralık ayında Hannover'a (Hanofa) (şimdiki Almanya) döner. Bu yıldan sonra, çeşitli yerlerde kısa süreli görevler almış ve seyahatlerde bulunmuş olsa da hayatının geri kalanının büyük bölümünü burada geçirir. Maden mühendisliği, diplomat, kütüphaneci, mahkeme tarihçisi ve danışmanlık gibi işler yapmıştır. Paris'te başladığı felsefi ve matematiksel çalışmalarını Hannover'de geliştirmeye devam etmiştir (Gür, 2005).

George BOOLE (Corç Buul, 1815-1864)

George Boole, İngiltere Lincoln'da (Linkın) bir ayakkabıcının oğlu olarak mütevazi bir çevrede dünyaya gelmiştir. İlkokuldan sonra kısa süreliğine ticaretle ilgili derslerin işlendiği bir okula devam etti ama bu kısıtlı eğitimin ötesinde tamamen kendi kendine öğrenen birisiydi. İngiltere'deki sınıf ayrımının bilincinde olan George Boole, dışarıdan yardım almadan, bu bilgisinin sosyal statüsünü artıracağını ümit ederek Yunanca ve Latince öğrendi. Bu sayede Antik Yunan kasidesinden çevirdiği bir şiir ile ilk çalışmasını bastırabilmiş oldu. Yardım almadan kendi çabalarıyla büyük matematikçilerden Newton (Nivtın), Lagrange (Lagranj) ve Laplace (Laplas) tarafından yapılan çalışmalar üzerinde uzmanlaştı. Boole'un matematik üzerine yaptığı araştırmalar ilerledikçe, İngiltere'de zamanın en önemli matematikçilerinin özgün makalelerinin yer aldığı, Cambridge Mathematical Journal (Kembric Matımatikıl Cörnıl) isimli dergide özgün makalelerle katkıda bulunmaya başladı. Boole, işlemlerin analizi üzerine yaptığı "One General Method in Analysis" (Van Cenırıl Metıd Analisis) adlı çalışmasıyla ünlü oldu. Boole, yaygın olarak kullanılan sembollerin kümeler ya da önermeler olarak yorumlanabildiği sistemi "mantık cebiri" olarak adlandırmıştır (Burton, 2018).

Görsel 1.3 (George BOOLE)

1.1.1. Önermelerde Temel Kavramlar

Doğru ya da yanlış kesin hüküm bildiren ifadelere **önerme** denir. Önermeler genel olarak p, q, r, s, t, ... gibi harflerle gösterilir.

ÖRNEK

Aşağıda verilen ifadelerin önerme olup olmadıklarını bulunuz.

a) "Ankara Türkiye'nin başkentidir."
b) "Atatürk 1881 yılında doğmuştur."
c) "Bugün hava çok güzel."
ç) "Tavuk 4 ayaklı bir hayvandır."
d) "$3+5=8$ dir."
e) "İstanbul ili Akdeniz Bölgesi'ndedir."
f) "Görüşmek üzere!"
g) "Nasılsınız?"

ÇÖZÜM

a) "Ankara Türkiye'nin başkentidir." ifadesi kesin hüküm bildirdiğinden önerme belirtir.
b) "Atatürk 1881 yılında doğmuştur." ifadesi kesin hüküm bildirdiğinden önerme belirtir.
c) "Bugün hava çok güzel." ifadesi kesin hüküm bildirmediğinden önerme belirtmez.
ç) "Tavuk 4 ayaklı bir hayvandır." ifadesi kesin hüküm bildirdiğinden önerme belirtir.
d) "$3+5=8$ dir." ifadesi kesin hüküm bildirdiğinden önerme belirtir.
e) "İstanbul ili Akdeniz Bölgesi'ndedir." ifadesi kesin hüküm bildirdiğinden önerme belirtir.
f) "Görüşmek üzere!" ifadesi kesin hüküm bildirmediğinden önerme belirtmez.
g) "Nasılsınız?" ifadesi kesin hüküm bildirmediğinden önerme belirtmez.

Önerme, doğru veya yanlış kesin hüküm bildiren ifadelerdir. Bir önermenin hükmünün doğru ya da yanlışlığına önermenin **doğruluk değeri** denir. Önerme doğru ise doğruluk değeri **D** veya **1** ile yanlış ise **Y** veya **0** ile gösterilir. p doğru bir önerme ise $p \equiv 1$, yanlış bir önerme ise $p \equiv 0$ biçiminde ifade edilir.

ÖRNEK

Aşağıda verilen önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a) p: "$6 \cdot 8 = 48$ dir."
b) q: "Balıkesir bir ilçedir."
c) r: "En küçük doğal sayı 0 dır."
ç) s: "Zafer Bayramı, 30 Ağustos'ta kutlanır."
d) t: "$6+8=48$ dir."

ÇÖZÜM

a) "$6 \cdot 8 = 48$ dir" önermesi doğru önerme olduğundan $p \equiv 1$ olur.
b) "Balıkesir bir ilçedir." önermesi yanlış önerme olduğundan $q \equiv 0$ olur.
c) "En küçük doğal sayı 0 dır." önermesi doğru önerme olduğundan $r \equiv 1$ olur.
ç) "Zafer Bayramı, 30 Ağustos'ta kutlanır." önermesi doğru önerme olduğundan $s \equiv 1$ olur.
d) "$6 + 8 = 48$ dir." önermesi yanlış önerme olduğundan $t \equiv 0$ olur.

İki ya da daha çok önermenin doğruluk değeri aynı ise bu önermelere **denk önermeler** denir. p ve q denk önermeler ise $p \equiv q$ ile gösterilir. "p denktir q" şeklinde okunur.

ÖRNEK

Aşağıda verilen önermelerden denk olanları bulunuz.

p: "Fenerbahçe bir spor kulübüdür."
q: "İran sınır komşumuzdur."
r: "Havada oksijen yoktur."
s: "Gençlik ve Spor Bayramı, 23 Nisan'da kutlanır."

ÇÖZÜM

"Fenerbahçe bir spor kulübüdür." önermesi doğru önerme olduğundan $p \equiv 1$ olur.
"İran sınır komşumuzdur." önermesi doğru önerme olduğundan $q \equiv 1$ olur.
"Havada oksijen yoktur." önermesi yanlış önerme olduğundan $r \equiv 0$ olur.
"Gençlik ve Spor Bayramı, 23 Nisan'da kutlanır." önermesi yanlış önerme olduğundan $s \equiv 0$ olur.

Bu durumda $p \equiv 1$ ve $q \equiv 1$ olduğundan $p \equiv q$ olur. $r \equiv 0$ ve $s \equiv 0$ olduğundan $r \equiv s$ bulunur.

Bir önermenin hükmünün olumsuzu alınarak elde edilen önermeye, **önermenin değili (olumsuzu)** denir. Bir p önermesinin değili p' veya $\backsim p$ ile gösterilir ve "p önermesinin değili" şeklinde okunur. Doğru bir önermenin değili $1' \equiv 0$ ve yanlış bir önermenin değili $0' \equiv 1$ olur. Ayrıca bir önermenin değilinin değili yine kendisidir. $(p')' \equiv p$ olur.

ÖRNEK

Aşağıda verilen önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz ve bu önermelerin değillerini yazınız.

a) p: "Suç ve Ceza romanının yazarı Dostoyevski'dir."
b) q: "Van Gölü Elazığ'dadır."
c) r : "25 sayısı 3 ile tam bölünür."
ç) s: "$7+8=15$ dir."

ÇÖZÜM

a) p önermesi doğru bir önerme olduğundan $p \equiv 1$ olur.
p önermesinin değili p' : "Suç ve Ceza romanının yazarı Dostoyevski değildir."
b) q önermesi yanlış bir önerme olduğundan $q \equiv 0$ olur.
q önermesinin değili q' : "Van Gölü Elazığ'da değildir."
c) r önermesi yanlış bir önerme olduğundan $r \equiv 0$ olur.
r önermesinin değili r' : "25 sayısı 3 ile tam bölünmez."
ç) s önermesi doğru bir önerme olduğundan $s \equiv 1$ olur.
s önermesinin değili s' : "$7+8 \neq 15$ dir."

ÖRNEK

Bir p önermesinin, p ile q gibi iki önermenin ve p, q ile r gibi üç önermenin doğruluk durumlarını tablo ile gösteriniz.

ÇÖZÜM

p
1
0

Bir önerme için $2^1 = 2$ farklı durum vardır.

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

İki önerme için $2^2 = 4$ farklı durum vardır.

p	q	r
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

Üç önerme için $2^3 = 8$ farklı durum vardır.

SONUÇ

n tane farklı önerme için 2^n tane farklı doğruluk durumu vardır.

ÖRNEK

6 farklı önerme için kaç farklı doğruluk durumu olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$n = 6$ için 2^6 tane doğruluk durumu vardır. Bu durumda 6 önerme için
$2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$ tane doğruluk durumu vardır.

1.1.2. Bileşik Önermeler ve Bileşik Önermelerin Özellikleri

"ve", "veya", "ya da", "ise" ile "ancak ve ancak" bağlaçları mantık bağlaçları olarak adlandırılır. En az iki önermenin bu bağlaçlardan biri ile bağlanmasıyla oluşan yeni önermelere **bileşik önerme** denir.

1. "Veya $(\vee)$" Bağlacı ile Oluşturulan Bileşik Önermeler

Selin, babasından akşam eve gelirken pasta veya meyve suyu getirmesini istemektedir. Babası eve gelirken aşağıda bulunan durumlardan birini yapmıştır.

1. Pasta almış, meyve suyu almamıştır.
2. Meyve suyu almış, pasta almamıştır.
3. Hem pasta hem de meyve suyu almıştır.
4. Hem pasta hem de meyve suyu almamıştır.

İlk üç durumdan bir tanesi gerçekleşmişse Selin'in isteği yerine getirilmiş, 4. durum gerçekleşmişse Selin'in isteği yerine getirilmemiş olacaktır.

p ile q önermelerinin "veya" $(\vee)$ bağlacı ile bağlanmasıyla elde edilen bileşik önermeye "p veya q" önermesi denir ve "$p \vee q$" biçiminde gösterilir. Veya bağlacı ile kurulan bileşik önermenin doğruluk değeri; bileşenlerden en az biri doğru iken doğru, her iki bileşenin de yanlış olduğu durumda yanlış olmaktadır.

$p \vee q$ bileşik önermesinin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

ÖRNEK

p: "Dünya, Güneş'in etrafında döner."
q: "Ay, Dünya'nın uydusudur."

önermeleri veriliyor. Buna göre $p \vee q$ bileşik önermesini yazınız ve doğruluk değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

"Dünya, Güneş'in etrafında döner veya Ay, Dünya'nın uydusudur." önermesi $p \vee q$ bileşik önermesidir.

p doğru bir önerme olduğundan $p \equiv 1$ ve q doğru bir önerme olduğundan $q \equiv 1$ olur.
Bu durumda $(p \vee q) \equiv 1 \vee 1 \equiv 1$ bulunur.

2. "Ve $(\wedge)$" Bağlacı ile Oluşturulan Bileşik Önermeler

Selin, babasından akşam eve gelirken pasta ve meyve suyu getirmesini istemektedir. Babası eve gelirken aşağıda bulunan durumlardan birini yapmıştır.

1. Hem pasta hem de meyve suyu almıştır.
2. Meyve suyu almış, pasta almamıştır.
3. Pasta almış, meyve suyu almamıştır.
4. Hem pasta hem de meyve suyu almamıştır.

1. durum gerçekleşmişse Selin'in isteği yerine getirilmiş, diğer üç durum gerçekleşmişse Selin'in isteği yerine getirilmemiş olacaktır.

p ile q önermelerinin "ve $(\wedge)$" bağlacı ile bağlanmasıyla elde edilen bileşik önermeye "p ve q" önermesi denir ve "$p \wedge q$" biçiminde gösterilir. Ve bağlacı ile kurulan bileşik önermenin doğruluk değeri; bileşenlerden her ikisi de doğru iken doğru, en az biri yanlış iken yanlış olmaktadır.

$p \wedge q$ bileşik önermesinin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

ÖRNEK

p: “3 asal sayıdır.”
q: “3 en küçük asal sayıdır.”

önermeleri veriliyor. Buna göre $p \wedge q$ bileşik önermesini yazınız ve doğruluk değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

“3 asal sayıdır ve 3 en küçük asal sayıdır.” önermesi $p \wedge q$ bileşik önermesidir.

p doğru bir önerme olduğundan $p \equiv 1$ olur ve q yanlış bir önerme olduğundan $q \equiv 0$ olur. Bu durumda $p \wedge q \equiv 1 \wedge 0 \equiv 0$ bulunur.

ÖRNEK

p: “$4 + 5 = 9$”
q: “$6 \cdot 3 = 12$”
r: “$6 - (-3) = 3$”

önermeleri veriliyor. Buna göre $(p \wedge q')$ önermesi ile $(r \vee p')$ önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

p doğru bir önerme olduğundan $p \equiv 1$, q yanlış bir önerme olduğundan $q \equiv 0$ ve r yanlış bir önerme olduğundan $r \equiv 0$ olur. Bu durumda

$(p \wedge q') \equiv (1 \wedge 0') \equiv 1 \wedge 1 \equiv 1$
$(r \vee p') \equiv (0 \vee 1') \equiv 0 \vee 0 \equiv 0$ bulunur.

ÖRNEK

$(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$ olduğunu doğruluk tablosu ile gösteriniz.

ÇÖZÜM

p	q	p'	q'	$p \wedge q$	$(p \wedge q)'$	$p' \vee q'$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

Tabloya bakıldığında $(p \wedge q)'$ ile $p' \vee q'$ önermelerinin doğruluk değerlerinin aynı olduğu görülür.

Bu durumda $(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$ bulunur.

ÖRNEK

$q' \vee (q \wedge p') \equiv 0$ olduğuna göre p önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$q' \vee (q \wedge p') \equiv 0$ ise $q' \equiv 0$ ve $q \wedge p' \equiv 0$ olmalıdır. O hâlde $q' \equiv 0$ ise $q \equiv 1$ olur. q önermesinin doğruluk değeri $q \wedge p' \equiv 0$ denkliğinde yerine yazılırsa $1 \wedge p' \equiv 0$ olup $p' \equiv 0$ elde edilir.

Bu durumda $p' \equiv 0$ olduğundan $p \equiv 1$ bulunur.

ÖRNEK

$p \equiv 1$, $q \equiv 0$ ve $r \equiv 1$ ise $(p \wedge r)' \vee (q \vee r')$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$p \equiv 1$, $q \equiv 0$ ve $r \equiv 1$ değerleri $(p \wedge r)' \vee (q \vee r')$ ifadesinde yerlerine yazılırsa

$$(1 \wedge 1)' \vee (0 \vee 1') \equiv 1' \vee (0 \vee 0)$$
$$\equiv 0 \vee 0 \equiv 0 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$p \wedge (q' \vee r) \equiv 0$ ve $q \equiv 0$ olduğuna göre p önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$q \equiv 0$ ise $q' \equiv 1$ olur. q' önermesinin doğruluk değeri $p \wedge (q' \vee r) \equiv 0$ denkliğinde yerine yazılırsa $p \wedge (1 \vee r) \equiv 0$ olur. $1 \vee r \equiv 1$ olduğundan $p \wedge 1 \equiv 0$ olup $p \equiv 0$ bulunur.

ÖRNEK

$p \equiv 1$, $q \equiv 1$, $r \equiv 1$ ve $s \equiv 1$ olduğuna göre $(p \vee q)' \wedge (r \vee s)$ önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$p \equiv 1$, $q \equiv 1$, $r \equiv 1$ ve $s \equiv 1$ değerleri $(p \vee q)' \wedge (r \vee s)$ ifadesinde yerlerine yazılırsa

$$(1 \vee 1)' \wedge (1 \vee 1) \equiv 1' \wedge 1$$
$$\equiv 0 \wedge 1$$
$$\equiv 0 \text{ bulunur.}$$

“Veya $(\vee)$” ve “Ve $(\wedge)$” Bağlaçları ile Oluşturulan Bileşik Önermelerin Özellikleri

1.Tek Kuvvet Özelliği: Her p önermesi için $p \vee p \equiv p$ ve $p \wedge p \equiv p$ olur.

p	p	$p \vee p$
1	1	1
0	0	0

p	p	$p \wedge p$
1	1	1
0	0	0

$p \vee p \equiv p$ $\quad$ $p \wedge p \equiv p$

2. Değişme Özelliği: Her p ve q önermeleri için $p \vee q \equiv q \vee p$ ve $p \wedge q \equiv q \wedge p$ olur.

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0

$p \vee q \equiv q \vee p$ $\quad$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$

3. Birleşme Özelliği: Her p, q ve r önermeleri için $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ olur.

p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$(p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

Her p, q ve r önermeleri için $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ olur.

p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$(p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

4. Dağılma Özelliği: “ve” bağlacının “veya” bağlacı üzerine dağılma özelliği vardır.
Her p, q ve r önermeleri için $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ olur.

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

“veya” bağlacının “ve” bağlacı üzerine dağılma özelliği vardır.
Her p, q ve r önermesi için $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ olur.

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

3. “Ya da $(\veebar)$” Bağlacı ile Oluşturulan Bileşik Önermeler

Selin, babasından akşam eve gelirken pasta ya da meyve suyu getirmesini istemektedir. Babası eve gelirken aşağıda bulunan durumlardan birini yapmıştır.

1. Hem pasta hem de meyve suyu almıştır.
2. Meyve suyu almış, pasta almamıştır.
3. Pasta almış, meyve suyu almamıştır.
4. Hem pasta hem de meyve suyu almamıştır.

2 ve 3. durum gerçekleşmişse Selin’in isteği yerine getirilmiş, 1 ve 4. durum gerçekleşmişse Selin’in isteği yerine getirilmemiş olacaktır.

p ile q önermelerinin “ya da $(\veebar)$” bağlacı ile bağlanmasıyla elde edilen bileşik önermeye “p ya da q” önermesi denir ve “$p \veebar q$” şeklinde gösterilir. Ya da bağlacı ile kurulan bileşik önermenin doğruluk değeri; bileşenlerden her iki bileşen doğru veya her iki bileşen yanlış ise yanlış, sadece biri doğru ise doğru olmaktadır.

$p \veebar q$ bileşik önermesinin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.

p	q	$p \veebar q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

ÖRNEK

p: “2 asal sayıdır.”
q: “3 en küçük asal sayıdır.”

önermeleri veriliyor. Buna göre $p \veebar q$ bileşik önermesini yazınız ve doğruluk değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

“2 asal sayıdır ya da 3 en küçük asal sayıdır.” önermesi $p \veebar q$ bileşik önermesidir.
p doğru bir önerme olduğundan $p \equiv 1$ olur ve q yanlış bir önerme olduğundan $q \equiv 0$ olur.

Bu durumda $p \veebar q \equiv 1 \veebar 0 \equiv 1$ bulunur.

ÖRNEK

$p \equiv 1$ ve $q \equiv 0$ olmak üzere $(p \veebar q) \vee (q' \vee p)$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$q \equiv 0$ ise $q' \equiv 1$ olur. $p \equiv 1$, $q \equiv 0$ ve $q' \equiv 1$ denklikleri $(p \veebar q) \vee (q' \vee p)$ bileşik önermesinde yerlerine yazılırsa $(1 \veebar 0) \vee (1 \vee 1) \equiv 1 \vee 1 \equiv 1$ bulunur.

ÖRNEK

$(p \veebar 1) \vee (q \veebar 0) \equiv 0$ olduğuna göre $p \veebar q'$ önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$(p \veebar 1) \vee (q \veebar 0) \equiv 0$ olduğundan $(p \veebar 1) \equiv 0$ ve $(q \veebar 0) \equiv 0$ olmalıdır. Buradan $(p \veebar 1) \equiv 0$ ise $p \equiv 1$ ve $(q \veebar 0) \equiv 0$ ise $q \equiv 0$ olur. $q \equiv 0$ ise $q' \equiv 1$ elde edilir. O hâlde $p \equiv 1$ ve $q' \equiv 1$ denklikleri $p \veebar q'$ ifadesinde yerlerine yazılırsa $p \veebar q' \equiv 1 \veebar 1 \equiv 0$ bulunur.

“Ya da $(\veebar)$” Bağlacı ile Oluşturulan Bileşik Önermenin Özellikleri

1. Değişme Özelliği: Her p ve q önermeleri için $p \veebar q \equiv q \veebar p$ olur.

p	q	$p \veebar q$	$q \veebar p$
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

$$p \veebar q \equiv q \veebar p$$

2. Birleşme Özelliği: Her p, q ve r önermeleri için $(p \veebar q) \veebar r \equiv p \veebar (q \veebar r)$ olur.

p	q	r	$p \veebar q$	$q \veebar r$	$(p \veebar q) \veebar r$	$p \veebar (q \veebar r)$
1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0

$$(p \veebar q) \veebar r \equiv p \veebar (q \veebar r)$$

3. Her p önermesi için $p \veebar p \equiv 0$ olur.

p	p	$p \veebar p$
1	1	0
0	0	0

$$p \veebar p \equiv 0$$

4. Her p önermesi için $p \veebar 1 \equiv p'$ olur.

p	1	p'	$p \veebar 1$
1	1	0	0
0	1	1	1

$$p \veebar 1 \equiv p'$$

5. Her p önermesi için $p \veebar 0 \equiv p$ olur.

p	0	$p \veebar 0$
1	0	1
0	0	0

$$p \veebar 0 \equiv p$$

De Morgan Kuralları

$(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$ ve $(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$ denkliklerine **De Morgan kuralları** denir.

ÖRNEK

$(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$ olduğunu doğruluk tablosu yaparak gösteriniz.

ÇÖZÜM

$(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$ doğruluk tablosu aşağıdaki gibi oluşturulur.

p	q	p'	q'	$p \vee q$	$(p \vee q)'$	$p' \wedge q'$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1

Tabloya göre $(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$ olduğu görülür.

ÖRNEK

$(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$ olduğunu doğruluk tablosu yaparak gösteriniz.

ÇÖZÜM

$(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$ doğruluk tablosu aşağıdaki gibi oluşturulur.

p	q	p'	q'	$p \wedge q$	$(p \wedge q)'$	$p' \vee q'$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

Tabloya göre $(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$ olduğu görülür.

ÖRNEK

$(p' \vee q)' \equiv 1$ olduğuna göre p' ve q' nin doğruluk değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

De Morgan kuralı gereği $(p' \vee q)' \equiv p \wedge q' \equiv 1$ olur. $p \wedge q' \equiv 1$ ise $p \equiv 1$ ve $q' \equiv 1$ elde edilir. $p \equiv 1$ ise $p' \equiv 0$ olur. Bu durumda $p' \equiv 0$ ve $q' \equiv 1$ bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki ifadelerden önerme olanlarını bulunuz.

I. "7 asal sayıdır."
II. "İyi günler."
III. "Bir önerme yazınız."
IV. "3 ile 5 in çarpımı 17 dir."
V. "Kışı Uludağ'da geçirmemiz çok güzel."

2. p: "Bir dörtgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 360° dir."
önermesinin değilini yazınız.

3. Aşağıda verilen bileşik önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.
a) $1 \vee 0$
b) $0 \wedge 1$
c) $0 \veebar 0$
ç) $1 \wedge 1'$

4. $(1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0)$ ifadesinin doğruluk değerini bulunuz.

5. $p \equiv 1$ ve $q \equiv 0$ olduğuna göre $(p \vee q') \wedge p'$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

6. $(p \vee q) \wedge r \equiv 0$ ve $r \equiv 1$ olduğuna göre p ve q önermelerinin doğruluk değerlerini bulunuz.

7. p ile q önermesi için "$p \wedge q$", "$p \vee q$" ve "$p \veebar q$" bileşik önermelerinin doğruluk değerleri tablosunu oluşturunuz.

8. $p \vee p'$ önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

9. $p \wedge p'$ önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

10. $(p \wedge q')' \equiv 0$ olduğuna göre p ve q önermelerinin doğruluk değerlerini bulunuz.

11. $p \equiv 1$, $q \equiv 0$ ve $r \equiv 1$ olduğuna göre $(p \wedge q)' \vee r'$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

12. $p \equiv 1$, $q \equiv 1$ ve $r \equiv 0$ olduğuna göre $(p' \vee q)' \vee r'$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

13. $p \equiv 0$, $q \equiv 1$ ve $r \equiv 1$ olduğuna göre $(p \vee q)' \wedge r$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

14. $p' \wedge (q \wedge r) \equiv 1$ olduğuna göre p, q ve r önermelerinin doğruluk değerlerini bulunuz.

15. $p \veebar p'$ önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

16. $(0 \veebar 0) \wedge (1 \vee 1)$ ifadesinin doğruluk değerini bulunuz.

17. $p \equiv 0$ ve $q \equiv 1$ olduğuna göre $(p \veebar q) \wedge (q \veebar p')$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

18. p: "Ankara başkenttir."
q: "Bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 90° dir."

önermeleri veriliyor.

Buna göre $p \veebar q$ önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

1.1.3. Koşullu Önermeler ve İki Yönlü Koşullu Önermeler

1. Koşullu Önermeler

Selin, babasından akşam eve gelirken pasta alır ise meyve suyu da almasını istemektedir. Babası eve gelirken aşağıda bulunan durumlardan birini yapmıştır.

1. Hem pasta hem de meyve suyu almıştır.
2. Meyve suyu almış, pasta almamıştır.
3. Pasta almış, meyve suyu almamıştır.
4. Hem pasta hem de meyve suyu almamıştır.

1, 2 ve 4.durum gerçekleşmişse Selin'in isteği yerine getirilmiş, 3.durum gerçekleşmişse Selin'in isteği yerine getirilmemiş olacaktır.

p ile q önermelerinin "ise $(\Rightarrow)$" bağlacı ile bağlanmasıyla elde edilen "p ise q" önermesine **koşullu önerme** denir ve "$p \Rightarrow q$" biçiminde gösterilir. $p \Rightarrow q$ önermesinin doğruluk değeri; p önermesi doğru ve q önermesi yanlış iken yanlış diğer tüm durumlarda doğru olmaktadır.

$p \Rightarrow q$ koşullu önermesinin doğruluk değerleri tablosu aşağıdaki gibidir.

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

ÖRNEK

p: "26 çift bir tam sayıdır."
q: "En küçük asal sayı 3 tür."
önermeleri veriliyor. Buna göre $p \Rightarrow q$ önemesini yazıp doğruluk değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

p ve q önermeleri ile elde edilen koşullu önerme
$p \Rightarrow q$: "26 çift bir tam sayı ise en küçük asal sayı 3 tür." bileşik önermesidir.
p önermesi doğru bir önerme olduğundan $p \equiv 1$ ve q önermesi yanlış bir önerme olduğundan $q \equiv 0$ olur. Bu durumda $p \Rightarrow q \equiv 1 \Rightarrow 0 \equiv 0$ bulunur.

ÖRNEK

$p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$ olduğunu doğruluk tablosu oluşturarak gösteriniz.

ÇÖZÜM

$p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$ ifadesinin doğruluk tablosu aşağıdaki gibi oluşturulur.

p	q	p'	$p' \vee q$	$p \Rightarrow q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

$p' \vee q \equiv p \Rightarrow q$

ÖRNEK

$(1 \Rightarrow 0) \wedge (0 \Rightarrow 0)$ ifadesinin doğruluk değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$1 \Rightarrow 0 \equiv 0$ ve $0 \Rightarrow 0 \equiv 1$ olduğundan $(1 \Rightarrow 0) \wedge (0 \Rightarrow 0) \equiv 0 \wedge 1 \equiv 0$ bulunur.

ÖRNEK

$p \Rightarrow 1$ ifadesinin doğruluk değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$p \equiv 1$ olarak alınırsa $p \Rightarrow 1$ önermesi $1 \Rightarrow 1 \equiv 1$ olur.
$p \equiv 0$ olarak alınırsa $p \Rightarrow 1$ önermesi $0 \Rightarrow 1 \equiv 1$ olur.

Bu durumda $p \Rightarrow 1$ önermesinin doğruluk değeri, p önermesinin doğruluk değeri ne olursa olsun 1 olduğundan $p \Rightarrow 1 \equiv 1$ bulunur.

ÖRNEK

$(p \Rightarrow q) \vee r \equiv 0$ ise p, q ve r önermelerinin doğruluk değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$(p \Rightarrow q) \vee r \equiv 0$ olduğundan $p \Rightarrow q \equiv 0$ ve $r \equiv 0$ olmalıdır.
$p \Rightarrow q \equiv 0$ olduğundan $p \equiv 1$ ve $q \equiv 0$ olur.

Bu durumda $p \equiv 1, q \equiv 0$ ve $r \equiv 0$ bulunur.

ÖRNEK

$p \Rightarrow p'$ koşullu önermesinin

a) $p \equiv 0$ için doğruluk değerini
b) $p \equiv 1$ için doğruluk değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

a) $p \equiv 0$ ise $p' \equiv 1$ olur. Bu değerler $p \Rightarrow p'$ önermesinde yerine yazılırsa
$p \Rightarrow p' \equiv 0 \Rightarrow 1 \equiv 1$ olur.
b) $p \equiv 1$ ise $p' \equiv 0$ olur. Bu değerler $p \Rightarrow p'$ önermesinde yerine yazılırsa
$p \Rightarrow p' \equiv 1 \Rightarrow 0 \equiv 0$ olur.

ÖRNEK

p: "Ankara, Türkiye'nin başkentidir."
q: "Mardin, Güneydoğu Anadolu Bölgesi'ndedir."
r: "Sivas, Marmara Bölgesi'ndedir."

önermeleri veriliyor. Buna göre $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ koşullu önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Türkiye'nin başkenti Ankara olduğundan $p \equiv 1$ olur. Mardin, Güneydoğu Anadolu Bölgesi'nde yer aldığından $q \equiv 1$ ve Sivas, İç Anadolu Bölgesi'nde olduğundan $r \equiv 0$ olur. Bu değerler $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ ifadesinde yerlerine yazılırsa $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r \equiv (1 \Rightarrow 1) \Rightarrow 0 \equiv 1 \Rightarrow 0 \equiv 0$ bulunur.

Koşullu Önermenin Karşıtı, Tersi ve Karşıt Tersi

- $p \Rightarrow q$ önermesinin karşıtı $q \Rightarrow p$,
- $p \Rightarrow q$ önermesinin tersi $p' \Rightarrow q'$,
- $p \Rightarrow q$ önermesinin karşıt tersi $q' \Rightarrow p'$ olur.

ÖRNEK

p: "Bugün günlerden pazartesidir."
q: "Yarın günlerden salıdır."

önermeleri için $p \Rightarrow q$ önermesinin karşıtını, tersini ve karşıt tersini yazınız.

ÇÖZÜM

$p \Rightarrow q$: "Bugün günlerden pazartesi ise yarın günlerden salıdır."
Karşıtı ($q \Rightarrow p$): "Yarın günlerden salı ise bugün günlerden pazartesidir."
Tersi ($p' \Rightarrow q'$): "Bugün günlerden pazartesi değil ise yarın günlerden salı değildir."
Karşıt Tersi ($q' \Rightarrow p'$): "Yarın günlerden salı değil ise bugün günlerden pazartesi değildir."
şeklinde yazılır.

ÖRNEK

"$3x = 6 \Rightarrow x = 2$" koşullu önermesinin karşıtını, tersini ve karşıt tersini yazınız.

ÇÖZÜM

p:"$3x = 6$" ve q:"$x = 2$" olacağından $p \Rightarrow q$ önermesinin,
Karşıtı $(q \Rightarrow p)$: "$x = 2 \Rightarrow 3x = 6$"
Tersi $(p' \Rightarrow q')$: "$3x \neq 6 \Rightarrow x \neq 2$"
Karşıt Tersi $(q' \Rightarrow p')$: "$x \neq 2 \Rightarrow 3x \neq 6$" şeklinde yazılır.

İki Yönlü Koşullu Önermeler

p ile q önermelerinin "ancak ve ancak $(\Leftrightarrow)$" bağlacı ile bağlanmasıyla elde edilen "p ancak ve ancak q" önermesine **iki yönlü koşullu önerme** denir ve "$p \Leftrightarrow q$" biçiminde gösterilir. $p \Leftrightarrow q$ önermesinin doğruluk değeri; p önermesi ile q önermesinin her ikisinin de doğruluk değeri aynı iken doğru diğer tüm durumlarda yanlış olmaktadır.

$p \Leftrightarrow q$ koşullu önermesinin doğruluk değerleri tablosu aşağıdaki gibi oluşturulur.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

ÖRNEK

p ve q önermeleri için $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ olduğunu doğruluk tablosu ile gösteriniz.

ÇÖZÜM

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

Tabloya bakıldığında $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ ile $p \Leftrightarrow q$ bileşik önermelerinin doğruluk değerlerinin aynı olduğu görülür.

ÖRNEK

p : “68 çift tam sayıdır.”
q : “68 tam sayısı 2 ile bölünür.”

önermelerinin ancak ve ancak bağlacı ile bağlanmasıyla elde edilen iki yönlü koşullu önermeyi yazınız.

ÇÖZÜM

$p \Leftrightarrow q$: “68 çift tam sayıdır ancak ve ancak 68 tam sayısı 2 ile bölünür.” şeklinde yazılır.

ÖRNEK

$p \equiv 1$, $q \equiv 1$ ve $r \equiv 0$ olduğuna göre $(p \Leftrightarrow r) \Rightarrow (q \Leftrightarrow p)$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$p \equiv 1$, $q \equiv 1$ ve $r \equiv 0$ değerleri $(p \Leftrightarrow r) \Rightarrow (q \Leftrightarrow p)$ bileşik önermesinde yerlerine yazılırsa $(1 \Leftrightarrow 0) \Rightarrow (1 \Leftrightarrow 1) \equiv 0 \Rightarrow 1 \equiv 1$ bulunur.

ÖRNEK

$(p' \Leftrightarrow p) \vee (p' \vee p)$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

p ve p' önermelerinin doğruluk değerleri birbirinden farklı olacağından $p' \Leftrightarrow p \equiv 0$ ve $p' \vee p \equiv 1$ olur. Buradan $(p' \Leftrightarrow p) \vee (p' \vee p) \equiv 0 \vee 1 \equiv 1$ bulunur.

1.1.4. Her $(\forall)$ ve Bazı $(\exists)$ Niceleyicileri

“Her” niceleyicisi hepsi, tamamı, bütünü gibi anlamları ifade etmektedir. “Her” niceleyicisi **evrensel niceleyici** olarak adlandırılır ve “ $\forall$ ” ile gösterilir.

“Bazı” niceleyicisi bazısı, en az bir gibi anlamlara gelmektedir. “Bazı” niceleyicisi **varlıksal niceleyici** olarak adlandırılır ve “ $\exists$ ” ile gösterilir.

ÖRNEK

Aşağıda sözel olarak verilen önermeleri sembolik mantık diliyle ifade ediniz.

a) Her tam sayı bir doğal sayıdır.
b) Bazı gerçek sayıların 2 fazlası 9 dan büyüktür.

ÇÖZÜM

a) “Her” niceleyicisi “ $\forall$ ” ile gösterildiğinden “Her tam sayı bir doğal sayıdır.” önermesi "$\forall x \in \mathbb{Z},\ x \in \mathbb{N}$" şeklinde sembolik mantık diliyle yazılır.

b) “Bazı” niceleyicisi “ $\exists$ ” ile gösterildiğinden “Bazı gerçek sayıların 2 fazlası 9 dan büyüktür.” önermesi “ $\exists x \in \mathbb{R},\ x + 2 > 9$ ” şeklinde sembolik mantık diliyle yazılır.

Açık Önermeler

İçinde en az bir değişken bulunan ve bu değişkenlere verilen değerlere göre doğru ya da yanlış olduğu belirlenen önermelere **açık önermeler** denir. İçinde x gibi tek değişken bulunduran açık önerme $p(x), q(x), \dots$ biçiminde gösterillir. İçinde x ve y gibi iki değişken bulunduran açık önermeler ise $p(x,y), q(x,y), \dots$ biçiminde gösterilir. "Her" niceleyicisinin değili "bazı" niceleyicisi ve "bazı" niceleyicisinin değili "her" niceleyicisidir. "Her" ve "bazı" niceleyicisi ile yazılan açık önermelerin değili

$[\forall x,\ p(x)]' \equiv [\exists x,\ p'(x)]$

$[\exists x,\ p(x)]' \equiv [\forall x,\ p'(x)]$ olur.

ÖRNEK

Sözel olarak verilen "İki tam sayının toplamı 5 ten büyüktür." önermesini sembolik mantık diliyle yazınız.

ÇÖZÜM

Sözel olarak verilen "İki tam sayının toplamı 5 ten büyüktür." önermesi sembolik mantık diliyle $p(x,y)$:"$x+y > 5$ ve $x, y \in \mathbb{Z}$" biçiminde ifade edilir.

ÖRNEK

Aşağıda niceleyici içeren açık önermeleri sembolik mantık diliyle ifade edip doğruluk değerlerini iceleyiniz.

a) p: "Her negatif iki tam sayının toplamı negatiftir."
b) q: "Bazı tam sayılar negatiftir."

ÇÖZÜM

a) "Her negatif iki tam sayının toplamı negatiftir." önermesi sembolik mantık diliyle $p(x,y)$: "$\forall x,\ y \in \mathbb{Z}^-,\ x+y < 0$" olur. $p(x,y)$ önermesi, her negatif iki tam sayı için doğru olduğundan bu önermenin doğruluk değeri 1 dir.

b) "Bazı tam sayılar negatiftir." önermesi sembolik mantık diliyle $q(x)$: "$\exists x \in \mathbb{Z},\ x < 0$" olur. $q(x)$ önermesi, bazı tam sayı değerleri için doğru olduğundan bu önermenin doğruluk değeri 1 dir.

ÖRNEK

$p(x)$: "$\forall x \in \mathbb{N},\ x+1>0$" sembolik mantık diliyle verilen açık önermeyi sözel olarak ifade ediniz.

ÇÖZÜM

$p(x)$: "$\forall x \in \mathbb{N},\ x+1>0$" sembolik mantık diliyle verilen açık önerme
p: "Her doğal sayının bir fazlası pozitiftir." şeklinde sözel olarak ifade edilir.

ÖRNEK

$p(x)$: "$(\forall x \in \mathbb{Z},\ x^2>0) \wedge (\exists x \in \mathbb{N},\ x^2 \leq 0)$" açık önermesinin değilini bulunuz.

ÇÖZÜM

$p(x)$: "$(\forall x \in \mathbb{Z},\ x^2>0) \wedge (\exists x \in \mathbb{N},\ x^2 \leq 0)$" açık önermesinin değili
$p'(x)$: "$(\exists x \in \mathbb{Z},\ x^2 \leq 0) \vee (\forall x \in \mathbb{N},\ x^2>0)$" bulunur.

ÖRNEK

$p(x)$: "$(\exists x \in \mathbb{Z},\ x^3+4 \geq 0) \vee (\forall x \in \mathbb{N},\ x^2+9>0)$" açık önermesinin değilini bulunuz.

ÇÖZÜM

$p(x)$: "$(\exists x \in \mathbb{Z},\ x^3+4 \geq 0) \vee (\forall x \in \mathbb{N},\ x^2+9>0)$" açık önermesinin değili
$p'(x)$: "$(\forall x \in \mathbb{Z},\ x^3+4<0) \wedge (\exists x \in \mathbb{N},\ x^2+9 \leq 0)$" bulunur.

ÖRNEK

Sözel olarak verilen "Her iki doğal sayının toplamı pozitiftir." önermesini sembolik mantık diliyle yazınız ve bu önermenin değilini bulunuz.

ÇÖZÜM

Sözel olarak verilen "Her iki doğal sayının toplamı pozitiftir." önermesinin sembolik mantık diliyle yazımı $p(x,y)$: "$\forall x,y \in \mathbb{N},\ x+y>0$" olur. Bu açık önermenin değili $p'(x,y)$: "$\exists x,y \in \mathbb{N}, x+y \leq 0$" bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıda verilen ifadelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a) $1 \Rightarrow 1$
b) $1 \Rightarrow 0$
c) $0 \Rightarrow 0$
ç) $0 \Rightarrow 1$

2. $(1 \Rightarrow 1) \Rightarrow (0 \Rightarrow 1)$ ifadesinin doğruluk değerini bulunuz.

3. $p \vee (q \Rightarrow r) \equiv 0$ olduğuna göre p, q ve r önermelerinin doğruluk değerlerini bulunuz.

4. $(p \vee 1) \Rightarrow (q \wedge 0)$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

5. $(1' \Rightarrow 0') \wedge (0 \Rightarrow 0)$ ifadesinin doğruluk değerini bulunuz.

6. p: "13 iki basamaklı en küçük asal sayıdır."
q: "7 asal bir sayıdır."

önermeleri veriliyor.

Buna göre $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

7. "$p \Rightarrow 0 \equiv 0$" olduğuna göre p önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

8. $(p' \wedge q) \Rightarrow r \equiv 0$ olduğuna göre p, q ve r önermelerinin doğruluk değerlerini bulunuz.

9. "$2x = 6 \Rightarrow x = 3$" önermesinin tersi olan önermeyi yazınız.

10. Aşağıdaki tabloya göre A, B ve C değerlerini bulunuz.

p	q	$p' \Rightarrow q$	$q' \Rightarrow p$	$(p' \Rightarrow q) \Rightarrow (q' \Rightarrow p)$
1	1	1	1	1
1	0	A	1	1
0	1	1	B	1
0	0	0	0	C

11. p: "Hacer resim yapar."
q: "Hacer öğretmendir"

önermeleri veriliyor. Buna göre $p \Rightarrow q$ önermesinin sözel ifadesini yazınız.

12. p önermesinin doğruluk değeri ile $(1 \Rightarrow 1) \Rightarrow (0 \Rightarrow 0)$ ifadesinin doğruluk değeri farklıdır.

Buna göre $(p' \Rightarrow 0)$ önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

13. "Gökkuşağı çıkar ise yağmur diner." önermesinin karşıt tersini bulunuz.

14. "$x = 4 \Rightarrow 2x + 3 = 11$" koşullu önermesinin karşıt tersi olan önermeyi bulunuz.

15. "$5x - 2 = 3 \Rightarrow x = 1$" koşullu önermesinin karşıtı olan önermeyi bulunuz.

16. Aşağıda verilen ifadelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a) $1 \Leftrightarrow 1$
b) $1 \Leftrightarrow 0$
c) $0 \Leftrightarrow 0$
ç) $0 \Leftrightarrow 1$

17. Aşağıda $(p \Leftrightarrow q')$ bileşik önermesinin doğruluk tablosu verilmiştir.

p	q	$(p \Leftrightarrow q')$
1	1	a
1	0	b
0	1	c
0	0	d

Buna göre a, b, c ve d değerlerini bulunuz.

18. $(1' \Rightarrow 1) \Leftrightarrow (1 \Rightarrow 0)'$ önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

19. $(p \Leftrightarrow 0) \Rightarrow (q \Leftrightarrow 1)$ önermesinin en sade şeklini bulunuz.

20. $(1 \Rightarrow p) \Leftrightarrow (0 \Rightarrow q)$ önermesinin en sade hâlini bulunuz.

21. $p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p$ denkliğini doğruluk tablosu çizerek gösteriniz.

22. p: "Hava kapalıdır."
q: "Yağmur yağar."
önermeleri veriliyor.

Buna göre "Hava kapalı değil ise yağmur yağar." önermesini sembolik mantık diliyle yazınız.

23. Sembolik mantık diliyle verilen $p(x)$: "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 4 \geq 0$" açık önermesinin sözel olarak ifadesini yazınız.

24. $p(x)$: "$\forall x \in \mathbb{N}, x^4 - 12 \geq 0$" açık önermesinin değilini bulunuz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

1. Aşağıda verilen ifadelerden hangisi bir önerme belirtmez?

A) Muş, İç Anadolu Bölgesi'ndedir.
B) Zafer kazandım.
C) 15 in 4 tane pozitif böleni vardır.
D) Kocatepe Camisi Adana'dadır.
E) Lüfer, bir balıktır.

2. "Cumhuriyet 1923 yılında kurulmuştur." ifadesi ile ilgili olarak aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) Yanlış önermedir.
B) Doğru önermedir.
C) Önerme değildir.
D) Bileşik önermedir.
E) Koşullu önermedir.

3. Aşağıda verilen denkliklerden hangisi yanlıştır?

A) $1 \vee 1 \equiv 1$ B) $1 \vee 0 \equiv 1$ C) $0 \wedge 1 \equiv 0$
D) $0 \vee 0 \equiv 0$ E) $0 \wedge 0 \equiv 1$

4. 4 farklı önermenin kaç farklı doğruluk durumu vardır?

A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 32

5. n tane farklı önermenin 512 farklı doğruluk durumu var ise n değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

6. Gülcan, n tane önermeden oluşan doğruluk tablosu ve Kubilay ise $n + 4$ tane önermeden oluşan doğruluk tablosu oluşturuyor. Kubilay'ın doğruluk tablosunun satır sayısı Gülcan'ın doğruluk tablosunun satır sayısından 120 fazla olduğuna göre n değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

7. $p \equiv 0$, $q \equiv 1$ ve $r' \equiv 1$
olduğuna göre aşağıdakilerden hangisinin doğruluk değeri 0 dır?

A) $(p \vee q) \vee r$ B) $(p' \vee r) \vee q$ C) $(p' \vee q) \vee r$
D) $(p \vee r) \vee q'$ E) $(p \vee r') \vee q$

8. $p \equiv 1$, $q \equiv 1$ ve $r' \equiv 0$
olduğuna göre aşağıdakilerden hangisinin doğruluk değeri 1 dir?

A) $(p \wedge q) \wedge r$ B) $(p' \wedge r) \wedge 1$ C) $(q' \wedge r') \wedge p$
D) $(p \wedge r) \wedge q'$ E) $(r \wedge q') \wedge p$

9. Aşağıdakilerden hangisi $(1 \vee 0)'$ ifadesine denktir?

A) $P \vee 1$ B) $P \vee 0$ C) $P \wedge 0$
D) $P \wedge 1$ E) $P \veebar 1$

10.
I. $(1 \veebar 0) \vee (0 \veebar 0) \equiv 1$
II. $(1 \vee 0) \wedge (0 \vee 1) \equiv 0$
III. $(1 \wedge 1) \vee (0 \vee 1) \equiv 1$
IV. $(0 \vee 0) \wedge (1 \vee 0) \equiv 1$

Yukarıda verilen denkliklerden kaç tanesi doğrudur?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

11. Aşağıdakilerden hangisi $1 \Rightarrow 1$ ifadesine denktir?

A) $0 \vee 0$ B) $0 \wedge 1$ C) $0 \wedge 0$ D) $1 \Rightarrow 0$ E) $0 \vee 1$

12.

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow p$
1	1	1	1
1	0	1	a
0	1	1	b
0	0	0	c

Verilen tabloda a, b ve c yerine gelecek doğruluk değerleri sırasıyla aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1, 1, 1 B) 0, 0, 0 C) 1, 0, 1 D) 1, 0, 0 E) 0, 1, 1

13. $p' \vee (q \Rightarrow r) \equiv 0$
olduğuna göre p, q ve r nin doğruluk değerleri sırasıyla aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1,1,0 B) 1,0,0 C) 0,1,0 D) 0,0,1 E) 0,1,1

14. Aşağıdakilerden hangisi $(1 \Rightarrow 1) \Rightarrow (0 \Rightarrow 0)$ ifadesine denktir?

A) $1 \Rightarrow 0$ B) $0 \wedge 1$ C) $0 \vee 0$ D) $1 \Rightarrow (0 \wedge 0)$ E) $0 \vee 1$

15.

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$
1	1	1	a
1	0	0	b
0	1	0	c
0	0	0	d

Verilen tabloda a, b, c ve d yerine gelecek doğruluk değerleri sırasıyla aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1, 1, 1, 1 B) 0, 0, 0, 0 C) 1, 0, 1, 1 D) 1, 0, 0, 1 E) 0, 1, 1, 0

16. $p \Rightarrow q$ önermesinin karşıt tersi olan önerme aşağıdakilerden hangisidir?

A) $p' \Rightarrow q'$ B) $q' \Rightarrow p'$ C) $p' \Rightarrow q$ D) $p \Rightarrow q'$ E) $q \Rightarrow p'$

17. $p \equiv 1$ ve $q \equiv 0$ olduğuna göre
$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p' \Rightarrow q)$ önermesi

aşağıdakilerden hangisine denk <u>değildir</u>?

A) 1 B) 0 C) $(q')'$ D) q E) p'

18. $p(x)$: "$\exists x \in \mathbb{R}, |x| \leq 0$"
önermesinin değili aşağıdakilerden hangisidir?

A) "$\forall x \in \mathbb{R}, |x| \leq 0$"
B) "$\exists x \in \mathbb{R}, |x| \leq 0$"
C) "$\forall x \in \mathbb{R}, |x| < 0$"
D) "$\forall x \in \mathbb{R}, |x| > 0$"
E) "$\exists x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$"

19. Sembolik mantık diliyle verilen
$P(x)$: "$\forall x \in \mathbb{N}, x \geq 0$"
önermesinin sözel olarak ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) Bazı doğal sayılar sıfırdan büyüktür.
B) Her doğal sayı sıfırdan büyüktür.
C) Bazı doğal sayılar sıfırdan büyüktür ya da eşittir.
D) Her doğal sayı sıfırdan büyüktür ya da eşittir.
E) Her doğal sayı sıfırdan küçüktür.

20-25. sorularda boş bırakılan yerlere uygun sözcük ya da değerleri yazınız.

20. 5 farklı önermenin .... tane farklı durumu vardır.

21. $[(0 \wedge 0)' \vee (0 \vee 1)]$ önermesinin değilinin doğruluk değeri .... olur.

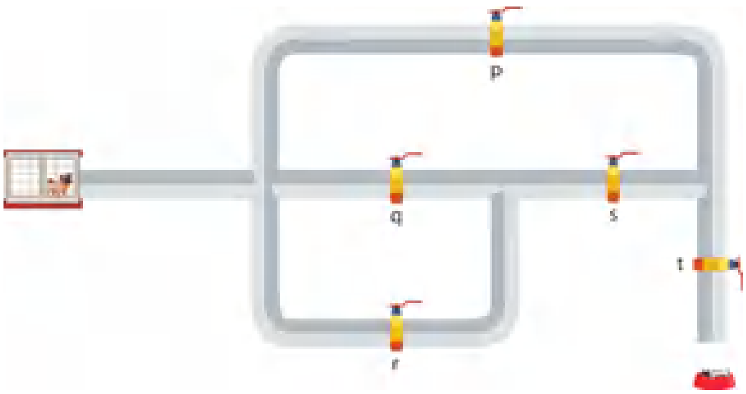
22. $(p \veebar 1) \vee (p \veebar 0)$ önermesinin doğruluk değeri .... olur.

23. $p \Rightarrow q : "x = 4 \Rightarrow x^2 = 16"$ koşullu önermesinin tersi .... olur.

24. $p(x) : "\forall x \in \mathbb{N},\ 2x - 1 \leq 9"$ açık önermesinin değili .... olur.

25. $p(x) : "\exists x \in \mathbb{R},\ 5x - 2 = 0"$ önermesinin sözel olarak yazılışı .... olur.

26.



Görsel 1.4

Şekilde görülen köpek labirent şeklindeki tüpün içinden geçerek tabağın içindeki yemeğe ulaşmak istiyor. p, q, r, s ve t kapılarının açık olduğu (köpeğin geçebildiği) durum 1 ile kapalı olduğu durum 0 ile gösterilmektedir.
Buna göre,

I. $q \equiv 1,\ s \equiv 1,\ t \equiv 0$ II. $p \vee t \equiv 1,\ s \equiv 0$ III. $p \wedge t \equiv 1$

IV. $p \equiv 0,\ r \wedge s \wedge t \equiv 1$ V. $q \equiv 1,\ s \vee t \equiv 0$

durumlarından hangilerinde köpek yemeğine kesinlikle ulaşabilir?

KÜMELER

KÜMELER

2. 1. KÜMELERDE TEMEL KAVRAMLAR
2. 2. KÜMELERDE İŞLEMLER

2.1. KÜMELERDE TEMEL KAVRAMLAR

HAZIRLIK ÇALIŞMALARI

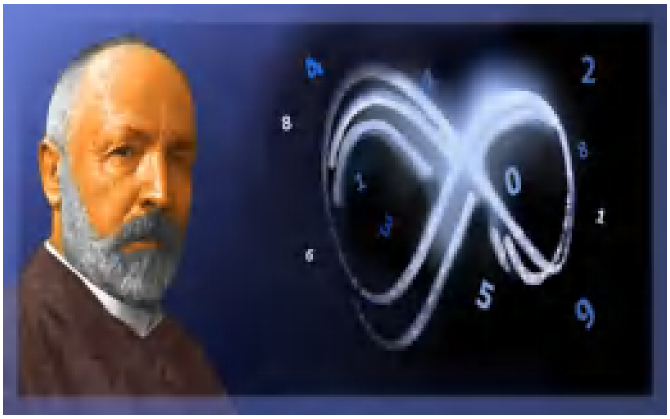
1. Sınıfınızda 5 kişilik sosyal yardımlaşma ekibi oluşturulmak istenirse bunu hangi arkadaşlarınızdan oluştururdunuz?

2. Oluşturduğunuz ekipteki arkadaşlarınızın ortak özellikleri nelerdir?

3. Aşağıdaki ifadelerden hangisi veya hangilerini kullanarak sınıfınızdan 5 kişilik bir ekip oluşturabilirsiniz?

- En başarılı 5 öğrenci
- En komik 5 öğrenci
- Bazı 5 öğrenci
- Sınıf listesinin ilk beş sırasındaki 5 öğrenci

İnsanoğlu var olduğu andan itibaren matematiği farkında olarak veya olmayarak kullanmıştır. Matematiğin kullanım alanları sürekli gelişerek devam etmiştir. Matematik hayatı kolaylaştıran buluşların temelini oluşturmuştur. İnsanlığın attığı her adımda matematik yer almaktadır. İnsanlığın ve matematiğin gelişim sürecinde "kümeler" kavramı da 19. yy.da matematiksel bir kavram olarak tanımlanmıştır. 1845-1918 yılları arasında yaşamış olan Alman Matematikçi Georg Cantor (Corç Kantor), kümeler konusunun temelini oluşturan matematikçi olarak bilinir.



Görsel 2.1 (Georg CANTOR)

Georg Cantor, matematik araştırmalarında ve problemlerinde nesnelerin kendi aralarında belirli özelliklerine göre gruplandırıldığında çözümün daha kolay olacağını fark etmiştir. Cantor küme ve sonsuzluk kavramlarının üzerinde ciddiyetle durulması gerektiğini, aksi takdirde içinden çıkılmaz sorunlarla boğuşulacağı düşüncesini dile getiren ilk kişidir.

Sonsuzluk kavramını bir nicelik olarak matematiğe kazandırmıştır. Günümüze kadar geliştirilen kümeler konusu; mühendislik, mimarlık, tıp, pazarlama, işletme, iktisat gibi birçok alanda kullanılmaktadır. Evde, işte, okulda, sokakta ve markette gördüğünüz veya düşündüğünüz her şeyden birer küme oluşturulabilir. Oluşturulan bu kümeler hayatı kolaylaştırmaktadır (Dönmez, 2005).

2.1.1. Kümeler ile İlgili Temel Kavramlar

Küme Kavramı

Küme, iyi tanımlanmış birbirinden farklı nesneler topluluğudur.

ÖRNEK

Aşağıdaki ifadelerden hangilerinin bir küme belirteceğini bulunuz.

a) “Türkiye’deki bazı iller”
b) “Türkiye’nin A harfi ile başlayan illeri”
c) “Türkiye’nin en güzel yaylaları”
ç) “Türkiye’nin akarsuları”
d) “Türkiye’nin coğrafi bölgeleri”

ÇÖZÜM

a) “Türkiye’deki bazı iller” ifadesinde hangi illerin kastedildiği anlaşılamaz. Bu ifade net ve anlaşılır şekilde tanımlanmadığından bir küme belirtmez.

b) “Türkiye’nin A harfi ile başlayan illeri” ifadesi iyi tanımlanmış, anlaşılır bir ifade olduğundan bir küme belirtir.

c) “Türkiye’nin en güzel yaylaları” ifadesinde güzel göreceli bir kavram olduğundan bu ifade bir küme belirtmez.

ç) “Türkiye’nin akarsuları” ifadesi net ve anlaşılır şekilde tanımlandığından bir küme belirtir.

d) “Türkiye’nin coğrafi bölgeleri” ifadesi net ve anlaşılır şekilde tanımlandığından bir küme belirtir.

ÖRNEK

Aslı: “En güzel çiçekler”
Ege: “Kış mevsiminin ayları”
Ada: “İstanbul’daki en iyi lokantalar”

Yukarıda adı geçen öğrencilerin kurmuş olduğu cümlelerden hangilerinin bir küme belirteceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

“Kış mevsiminin ayları” denildiğinde söylenmek istenen açıkça anlaşılmaktadır. Burada nesnelerin niteliği açık olup iyi tanımlanmış olduğundan Ege’nin kurmuş olduğu cümle bir küme belirtir.

“Güzel” ve “iyi” göreceli kavramlar olduğundan içerdikleri anlamlar kişiye göre farklılık gösterir. Bu nedenle Aslı ve Ada’nın söylediği ifadeler bir küme belirtmez.

Kümenin Elemanları

Kümeyi oluşturan nesnelere **kümenin elemanları** denir. Kümeler A, B, C,… gibi büyük harflerle gösterilir.

a elemanı, A kümesinin elemanı ise $a \in A$ ile gösterilir ve "a elemanıdır A" diye okunur. a elemanı, A kümesinin elemanı değil ise $a \notin A$ ile gösterilir ve "a elemanı değildir A" diye okunur.

ÖRNEK

Marmara Bölgesi'nin illeri İstanbul, Bursa, Edirne, Kırklareli, Tekirdağ, Balıkesir, Bilecik, Kocaeli, Yalova, Sakarya ve Çanakkale'dir. Marmara Bölgesi'nin illerinden oluşan küme M ile gösterilmektedir. Aşağıda verilen noktalı yerlere $\in$ veya $\notin$ sembollerinden uygun olanını yazınız.

a) İstanbul .... M	b) Bursa .... M	c) Ankara .... M
ç) Edirne .... M	d) Diyarbakır .... M	e) Balıkesir .... M

ÇÖZÜM

a) İstanbul, Marmara Bölgesi'nin bir ili olduğundan İstanbul $\in$ M olur.

b) Bursa, Marmara Bölgesi'nin bir ili olduğundan Bursa $\in$ M olur.

c) Ankara, Marmara Bölgesi'nin bir ili olmadığından Ankara $\notin$ M olur.

ç) Edirne, Marmara Bölgesi'nin bir ili olduğundan Edirne $\in$ M olur.

d) Diyarbakır, Marmara Bölgesi'nin bir ili olmadığından Diyarbakır $\notin$ M olur.

e) Balıkesir, Marmara Bölgesi'nin bir ili olduğundan Balıkesir $\in$ M olur.

ÖRNEK

4 ten büyük 9 dan küçük doğal sayıların oluşturduğu küme A olsun. A kümesinin elemanlarını yazarak kümeye ait olmayan iki doğal sayı bulunuz.

ÇÖZÜM

A kümesinin elemanları 5, 6, 7 ve 8 dir. Bu durumda $5 \in A$, $6 \in A$, $7 \in A$ ve $8 \in A$ olur. A kümesinin elemanı olmayan birçok doğal sayı yazılabilir. 2 ve 9 sayıları A kümesinin elemanı olmayan sayılardan sadece iki tanesidir. $2 \notin A$ ve $9 \notin A$ şeklinde gösterilir.

Kümelerin Gösterimi

1. Liste Yöntemi ile Gösterim

Kümeyi oluşturan elemanların küme parantezi { } içine, aralarına virgül konularak yazılmasına kümelerin **liste yöntemi ile gösterimi** denir.

Küme içerisindeki elemanlar yer değiştirebilir ve her eleman küme içerisine bir kez yazılır.

ÖRNEK

Güneş sistemindeki gezegenlerin oluşturduğu A kümesini liste yöntemi ile gösteriniz.

ÇÖZÜM

Güneş sistemindeki gezegenler Merkür, Venüs, Dünya, Mars, Jüpiter, Satürn, Uranüs ve Neptün olduğundan $A = \{$Merkür, Venüs, Dünya, Mars, Jüpiter, Satürn, Uranüs, Neptün$\}$ şeklinde gösterilir.

ÖRNEK

9 dan küçük doğal sayıların oluşturduğu B kümesini liste yöntemiyle gösteriniz.

ÇÖZÜM

9 dan küçük doğal sayılar 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 olduğundan $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ şeklinde gösterilir.

ÖRNEK

TIRTIL kelimesinin harflerinden oluşan C kümesini liste yöntemi ile gösteriniz.

ÇÖZÜM

TIRTIL kelimesinde ikişer tane T ve I harfi olmasına rağmen küme içerisine T ve I harfleri birer kez yazılır. $C = \{T, I, R, L\}$ şeklinde gösterilir.

ÖRNEK

1112255 sayısının rakamlarından oluşan D kümesini liste yöntemi ile gösteriniz.

ÇÖZÜM

1112255 sayısında iki tane 2, iki tane 5 ve üç tane 1 rakamı olmasına rağmen küme içerisine bu rakamlar birer kez yazılır. $D = \{1, 2, 5\}$ şeklinde gösterilir.

2. Venn Şeması Yöntemi ile Gösterim

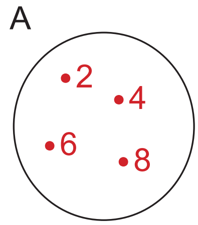
Kümeyi oluşturan elemanların kapalı bir şekil içerisine her bir elemanın önüne nokta konularak yazılmasına kümelerin Venn şeması yöntemi ile gösterimi denir. Bu kapalı şekil; çember, elips, dikdörtgen, üçgen vb. şekilde olabilir.

ÖRNEK

$A = \{2, 4, 6, 8\}$ kümesini Venn şeması yöntemi ile gösteriniz.

ÇÖZÜM

A kümesinin elemanları yanlarına nokta konularak kapalı bir şekil içine yazıldığında bu kümenin Venn şeması yöntemi ile gösterimi yandaki gibi olur.



ÖRNEK

9-A sınıfından Arda, Metin, Tuncay ve Volkan okulun futbol takımının seçmelerine katılacaktır. Bu öğrencileri F kümesinde Venn şeması yöntemi ile gösteriniz.

ÇÖZÜM

F kümesinin elemanları yanlarına nokta konularak kapalı bir şekil içine yazıldığında bu kümenin Venn şeması ile gösterimi yandaki gibi olur.

3. Ortak Özellik Yöntemi ile Gösterim

Kümeyi oluşturan elemanların ortak özellikleri belirtilerek gösterimine kümelerin **ortak özellik yöntemi ile gösterimi** denir. Kümeyi bu yöntem ile yazabilmek için elemanların ortak özelliklerinin olması gerekmektedir.

x, A kümesinin elemanı olmak üzere $A = \{\, x \mid x$ in sahip olduğu tanımlayıcı özellikler$\}$ şeklinde yazılır.

ÖRNEK

Elemanları "Pazar, Pazartesi, Perşembe" olan A kümesini ortak özellik yöntemi ile gösteriniz.

ÇÖZÜM

A = {Pazar, Pazartesi, Perşembe} şeklinde liste yöntemiyle yazıldığında A kümesinin elemanlarının haftanın baş harfi "P" olan günleri olduğu görülür. Bu durumda A kümesi ortak özellik yöntemiyle $A = \{\, x \mid x$, haftanın P ile başlayan günleri$\}$ biçiminde gösterilir.

ÖRNEK

$P = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots, 35\}$ kümesini ortak özellik yöntemiyle gösteriniz.

ÇÖZÜM

$P = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots, 35\}$ kümesinde "..." ifadesi sayıların 35 e kadar birer birer artarak devam ettiği anlamına gelir.

P kümesi ortak özellik yöntemiyle

$P = \{x \mid x < 36,\ x \in \mathbb{N}\}$ veya $P = \{\, x \mid$ x, 36 dan küçük doğal sayılar$\}$ şeklinde gösterilir.

Eleman Sayısı

Bir küme içerisindeki elemanların sayısına kümenin **eleman sayısı** denir. Herhangi bir A kümesinin eleman sayısı $\mathbf{s(A)}$ şeklinde gösterilir.

ÖRNEK

Aşağıda verilen kümelerin eleman sayılarını bulunuz.

a) $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

b) $B = \{\bigstar, \bigcirc, \triangle, \square\}$

c) $C = \{x \mid x$ haftanın günleri$\}$

ç) $D = \{x \mid 0 < x < 9,\ x \in N\}$

ÇÖZÜM

a) $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ kümesinin eleman sayısı 5 olduğundan $s(A) = 5$ olur.
b) $B = \{\bigstar, \bigcirc, \triangle, \square\}$ kümesinin eleman sayısı 4 olduğundan $s(B) = 4$ olur.
c) Bir haftada 7 gün olduğundan $s(C) = 7$ olur.
ç) 0 ile 9 arasında 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8 doğal sayıları bulunduğundan $s(D) = 8$ olur.

ÖRNEK

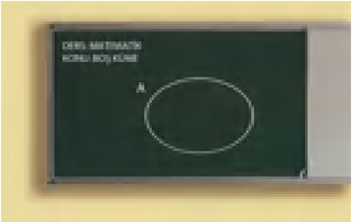
MATEMATİK kelimesinin harflerinden oluşan G kümesinin eleman sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

$G = \{M, A, T, E, i, K\}$ olduğundan $s(G) = 6$ bulunur.

Boş Küme

Elemanı olmayan kümeye **boş küme** denir. Boş küme $\varnothing$ veya $\{\ \}$ şeklinde gösterilir. Boş kümenin eleman sayısı 0 dır.



Görsel 2.2

ÖRNEK

Aşağıda verilen kümelerden hangilerinin boş küme olduğunu bulunuz.

a) Uçan zürafalardan oluşan küme

b) Haftanın z harfi ile başlayan günlerinden oluşan küme

c) 5 ile 6 arasındaki doğal sayılardan oluşan küme

ç) M harfi ile başlayan aylardan oluşan küme

d) 2 den küçük asal sayılardan oluşan küme

e) 5 ten küçük rakamların oluşturduğu küme

ÇÖZÜM

a) Uçan zürafa olmadığından uçan zürafalardan oluşan küme boş kümedir.

b) Haftanın z harfi ile başlayan günleri olmadığından haftanın z harfi ile başlayan günleri kümesi boş kümedir.

c) 5 ile 6 arasında doğal sayı olmadığından 5 ile 6 arasındaki doğal sayılardan oluşan küme boş kümedir.

ç) M harfi ile başlayan aylar Mart ve Mayıs olduğundan M harfi ile başlayan aylardan oluşan küme boş küme değildir.

d) 2 den küçük asal sayı olmadığından 2 den küçük asal sayılardan oluşan küme boş kümedir.

e) 5 ten küçük rakamlar 0, 1, 2, 3 ve 4 olduğundan 5 ten küçük rakamların oluşturduğu küme boş küme değildir.

Evrensel Küme

Üzerinde işlem yapılan ve bütün kümeleri içine alan en geniş kümeye **evrensel küme** denir ve E harfi ile gösterilir.

ÖRNEK

A kümesi "9-C sınıfındaki öğrencilerden oluşur."

B kümesi "9. sınıf öğrencilerinden oluşur."

C kümesi "Okulumuzdaki öğrencilerden oluşur."

Buna göre A, B ve C kümelerinden hangisi evrensel küme olabilir?

ÇÖZÜM

C kümesi, A ve B kümelerini içine aldığından evrensel küme olabilir.

Sonlu ve Sonsuz Kümeler

Elemanları sayılabilir çoklukta olan kümelere **sonlu küme**; sayılamayacak çoklukta olan kümelere **sonsuz küme** denir.

ÖRNEK

Aşağıda verilen kümeleri sonlu ve sonsuz küme olarak sınıflandırınız.

a) $A=\{1,2,3,4,5\}$
b) $B=\{x|x \text{ bir çift sayı}\}$
c) $C=\{x|\ 2<x<7,\ x \text{ bir doğal sayı}\}$
ç) $D=\{x|\ 5<x<21,\ x \text{ bir gerçek sayı}\}$

ÇÖZÜM

a) A kümesinin eleman sayısı 5 tir. A nın eleman sayısı, sayılabilir çoklukta olduğundan A kümesi sonlu bir kümedir.

b) B kümesinde sonsuz sayıda çift doğal sayı $\{0,2,4,6,\ldots\}$ olduğundan B kümesi sonsuz bir kümedir.

c) 2 ve 7 doğal sayıları arasında 3, 4, 5 ve 6 olmak üzere 4 tane doğal sayı olduğundan C kümesi sonlu bir kümedir.

ç) 5 ile 21 doğal sayıları arasında sonsuz tane gerçek sayı olduğundan D kümesi sonsuz bir kümedir.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki ifadelerin küme belirtip belirtmediğini yazınız.

I. "2019 yılında üretilen en güzel araba modelleri"

II. "Sınıfımızdaki gözlüklü öğrenciler"

III. "Okulumuzdaki bazı öğretmenler"

IV. "Türkçe'de Ğ ile başlayan kelimeler"

V. "Türkiye'nin illeri"

2. $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ kümesi veriliyor. Aşağıda boş bırakılan noktalı yerlere $\in$ ve $\notin$ sembollerinden uygun olanını yazınız.

a.........A	f..........A	b.........A
2.........A	g.........A	e.........A
c.........A	5.........A	h.........A

3. Türkiye'nin Ege Denizi'ne kıyısı olan illerinin kümesini liste yöntemiyle gösteriniz.

4. 5 ile 10 arasındaki doğal sayılardan oluşan kümeyi Venn şeması yöntemi ile gösteriniz.

5. $A = \{ x | x,$ 42 den küçük ve 5 in katı olan doğal sayılar$\}$ kümesini liste yöntemiyle yazınız.

6. $A = \{ x | x$, yılın ayları$\}$ kümesinin eleman sayısını bulunuz.

7. MERTER kelimesinin harflerinden oluşan kümeyi yazınız ve bu kümenin eleman sayısını bulunuz.

8. 313778 sayısının rakamlarından oluşan kümeyi yazınız ve bu kümenin eleman sayısını bulunuz.

9. Aşağıda verilen kümelerden hangilerinin boş küme belirttiğini bulunuz.

$A = \{ x | \ 1 < x < 5, \ x \in \mathbb{N}\}$

$B = \{ x | x,$ 15 ile bölünebilen bir doğal sayı$\}$

$C = \{x | \ 3 < x < 4, \ x \in \mathbb{N}\}$

10. $A = \{1, 2, 3\}$
$B = \{2, 4\}$
$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

kümeleri veriliyor. Buna göre bu kümeler üzerinde işlem yapılmak istendiğinde hangi kümenin evrensel küme olabileceğini bulunuz.

11. Aşağıda verilen kümelerden hangilerinin sonlu küme olduğunu bulunuz.

a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$
b) $B = \{ x | \ x$ iki basamaklı asal sayılar$\}$
c) $C = \{ x | \ 2 < x < 7, \ x$ bir doğal sayı$\}$
ç) $D = \{ x | \ x$ 2 nin katı olan tamsayılar$\}$

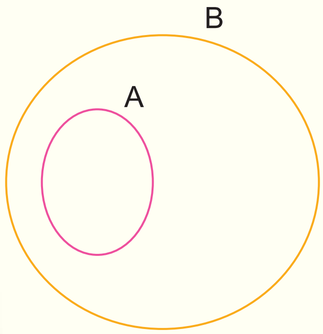
2.1.2. Alt Küme

Aşağıda verilen Türkiye haritasında Balıkesir ili ve Balıkesir'in Karesi ilçesi gösterilmiştir.

Görsel 2.3

Haritaya bakıldığında Karesi ilçesi hem Balıkesir ilinin hem de Türkiye'nin içinde yer almaktadır.

Bu durumda Türkiye Balıkesir ilini, Balıkesir ili de Karesi ilçesini kapsamaktadır.

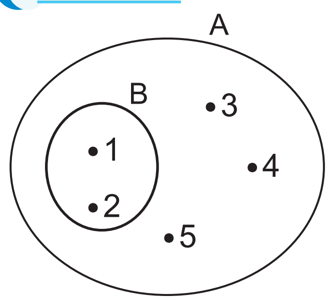


A kümesinin her elemanı aynı zamanda B kümesinin de elemanı ise **A kümesi B kümesinin alt kümesidir** denir ve $\mathbf{A \subset B}$ ile gösterilir. A kümesi B kümesinin alt kümesi iken A nın elemanları ile B nin elemanlarının aynı olma durumu varsa $\mathbf{A \subseteq B}$ ile gösterilir. B kümesi A kümesini kapsar. Bu ifade ise $\mathbf{B \supset A}$ ile gösterilir. Venn şeması ile yandaki gibi çizim yapılarak gösterilir. A kümesinin B kümesinden farklı en az bir tane elemanı varsa **A kümesi B kümesinin alt kümesi değildir** denir. Bu ifade $\mathbf{A \not\subseteq B}$ ile gösterilir.

ÖRNEK

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $B = \{1, 2\}$ kümelerini Venn şeması yöntemiyle gösteriniz. Bu kümelerin arasındaki alt küme ilişkisini belirtiniz.

ÇÖZÜM



B kümesinin her elemanı A kümesinin de elemanı olduğundan B kümesi A kümesinin alt kümesidir. $B \subset A$ veya $A \supset B$ şeklinde gösterilir.

ÖRNEK

Ceyhun ve kuzeni Ali üniversiteyi kazanarak gittikleri İzmir'de K apartmanının D dairesinde yaşamaktadır. İzmir (İ), K apartmanı ve D dairesi bir küme olarak düşünüldüğünde İ, K ve D arasındaki alt küme ilişkisini belirtiniz.

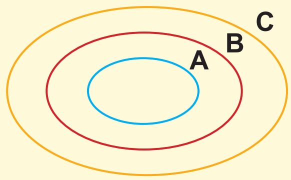
Görsel 2.4

ÇÖZÜM

D dairesi K apartmanının, K apartmanı ise İ'nin içindedir. Bu durumda $D \subset K \subset İ$ veya $İ \supset K \supset D$ şeklinde gösterilir.

Alt Kümenin Özellikleri

1. Herhangi bir A kümesi için $\varnothing \subseteq A$ olur. (Boş küme her kümenin bir alt kümesidir.)
2. Herhangi bir A kümesi için $A \subseteq A$ olur. (Her küme kendisinin bir alt kümesidir.)
3. E evrensel küme olmak üzere herhangi bir A kümesi için $A \subseteq E$ olur. (Her küme evrensel kümenin alt kümesidir.)
4. Herhangi A, B, C kümesi için $A \subseteq B$ ve $B \subseteq C$ ise $A \subseteq C$ olur. (A kümesi B kümesinin ve B kümesi C kümesinin alt kümesi ise A kümesi C kümesinin alt kümesidir.)



ÖRNEK

$A = \{\ \}$, $B = \{1\}$, $C = \{1, 2\}$, $D = \{1, 2, 3\}$ kümelerinin eleman sayısını, alt kümelerini ve alt küme sayısını yazınız.

ÇÖZÜM

Küme	Kümenin Eleman Sayısı	Kümenin Alt Kümeleri	Kümenin Alt Küme Sayısı
$A = \{\ \}$	0	$\varnothing$	$2^0 = 1$
$B = \{1\}$	1	$\varnothing, \{1\}$	$2^1 = 2$
$C = \{1, 2\}$	2	$\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$	$2^2 = 4$
$D = \{1, 2, 3\}$	3	$\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}$	$2^3 = 8$

SONUÇ

n elemanlı bir kümenin alt kümelerinin sayısı 2^n formülü ile hesaplanır.

ÖRNEK

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$ kümesinin alt küme sayısını alt kümelerini yazmadan bulunuz.

ÇÖZÜM

Kümenin eleman sayısı 6 olduğundan A kümesinin $2^6 = 64$ tane alt kümesi vardır.

ÖRNEK

32 tane alt kümesi olan bir küme kaç elemanlıdır?

ÇÖZÜM

Kümenin eleman sayısı n olsun. Bu durumda alt kümelerinin sayısı $2^n = 32$ olur. $2^5 = 32$ olduğundan kümenin eleman sayısı $n = 5$ olur.

ÖRNEK

ADANA kelimesindeki harfler kullanılarak oluşturulan kümenin alt küme sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

ADANA kelimesindeki harfler kullanılarak oluşturulan küme, B kümesi olsun. $B = \{A, D, N\}$ olduğundan $s(B) = 3$ olur. Bu durumda B kümesinin alt küme sayısı $2^3 = 8$ bulunur.

ÖRNEK

Bir A kümesinin alt küme sayısı, B kümesinin alt küme sayısının 4 katı ise A kümesinin eleman sayısı B kümesinin eleman sayısından kaç fazladır?

ÇÖZÜM

B kümesinin eleman sayısı n ise alt küme sayısı 2^n dir. B kümenin alt küme sayısının 4 katı A kümesinin alt küme sayısı olacağından $4 \cdot 2^n = 2^2 \cdot 2^n = 2^{n+2}$ olarak bulunur. Bu durumda A kümesinin eleman sayısı B kümesinin eleman sayısından 2 fazla olur.

ÖRNEK

$A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde c elemanı bulunmaz?

ÇÖZÜM

A kümesinden c elemanı çıkartılırsa $B = \{a, b, d, e\}$ kümesi elde edilir. B kümesinin tüm alt kümelerinde c elemanı bulunmaz. Bu durumda $s(B) = 4$ olduğundan c elemanının bulunmadığı alt küme sayısı $2^4 = 16$ olur.

ÖRNEK

$A=\{a,b,c\}$ kümesinin alt kümelerini yazınız. A kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde b elemanının olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

A kümesinin 0 elemanlı alt kümesi $\varnothing$

A kümesinin 1 elemanlı alt kümeleri $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$

A kümesinin 2 elemanlı alt kümeleri $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$

A kümesinin 3 elemanlı alt kümesi $\{a,b,c\}$ olur.

A kümesinin 8 tane alt kümesi vardır. Bu alt kümelerin 4 tanesinde b eleman olarak bulunur.

ÖRNEK

$A=\{a,b,c,\{d\},\{e,f\}\}$ olduğuna göre aşağıdakilerden hangilerinin doğru olduğunu bulunuz.

a) $a \in A$
b) $\{e,f\} \in A$
c) $\{e,f\} \subset A$
ç) $\{\{d\}\} \subset A$

ÇÖZÜM

a) a, A kümesinin elemanı olduğundan $a \in A$ ifadesi doğrudur.
b) $\{e,f\}$, A kümesinin elemanı olduğundan $\{e,f\} \in A$ ifadesi doğrudur.
c) $\{e,f\}$, A kümesinin alt kümesi olmadığından $\{e,f\} \subset A$ ifadesi doğru değildir.
ç) $\{\{d\}\}$, A kümesinin alt kümesi olduğundan $\{\{d\}\} \subset A$ ifadesi doğrudur.

ÖRNEK

$A=\{2\}$ ve $B=\{2,3,5\}$ kümeleri veriliyor. $A \subseteq K \subseteq B$ olacak şekilde kaç farklı K kümesi yazılabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

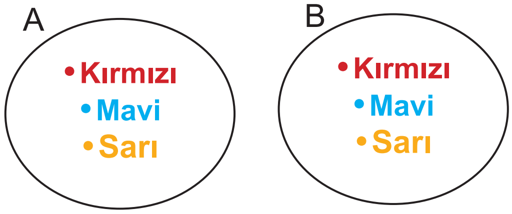
$B=\{2,3,5\}$ kümesinin alt kümeleri $\varnothing,\{2\},\{3\},\{5\},\{2,3\},\{2,5\},\{3,5\},\{2,3,5\}$ tir.
$A \subseteq K \subseteq B$ koşuluna uyan K kümeleri $\{2\},\{2,3\},\{2,5\},\{2,3,5\}$ olur.
Bu durumda 4 farklı K kümesi yazılabilir.

2.1.3. İki Kümenin Eşitliği

$A = \{x \mid x,\ \text{ana renkler}\}$

$B = \{$Kırmızı, mavi, sarı$\}$ kümeleri verilmiştir.

Kırmızı, mavi ve sarı ana renk olduğundan A ve B kümelerinin aynı olduğu görülür.



Aynı elemanlardan oluşan kümelere **eşit kümeler** denir. A ve B eşit iki küme ise $\mathbf{A = B}$ şeklinde gösterilir. A ve B kümeleri eşit kümeler değilse $\mathbf{A \neq B}$ şeklinde gösterilir. A ve B eşit kümeler ise A kümesinin her elemanı B kümesinin de elemanı olduğundan A kümesi B kümesinin, B kümesi de A kümesinin alt kümesidir. Bu durumda $A = B$ ise $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ olur.

ÖRNEK

$A = \{x \mid x,\ \text{MATARA kelimesinin harfleri}\}$ ve $B = \{M, A, T, R\}$ kümeleri veriliyor. A ve B kümelerinin eşit küme olup olmadıklarını gösteriniz.

ÇÖZÜM

Ortak özellik yöntemi ile verilen A kümesi liste yöntemi ile yazılırsa $A = \{M, A, T, R\}$ şeklinde olacaktır. B kümesi $B = \{M, A, T, R\}$ verildiğinden A ve B kümeleri eşit kümeler olur.

ÖRNEK

$A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ ve $C = \{x \mid 0 < x < 4,\ x \in \mathbb{N}\}$ kümelerinin eşit küme olup olmadığını gösteriniz.

ÇÖZÜM

A ve B kümeleri liste yöntemi ile verilmiştir. C kümesi liste yöntemi ile yazılırsa $C = \{1, 2, 3\}$ olur. Bu durumda $B = \{1, 2, 3\}$ ve $C = \{1, 2, 3\}$ olduğundan $B = C$ olur.
A kümesi B ve C kümelerine eşit değildir. $A \neq B$ ve $A \neq C$ olur.

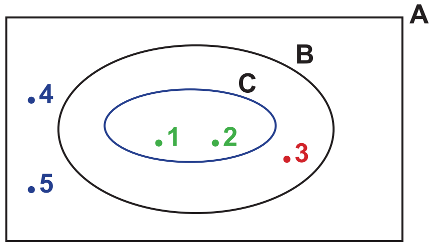
ALIŞTIRMALAR

1. $A = \{a, b, c, d\}$ ve $B = \{a, b\}$ kümelerini Venn şeması yöntemi ile gösteriniz. A ve B kümeleri arasındaki alt küme ilişkisini belirtiniz.

2. Aşağıdaki tabloda verilen kümelerin alt kümelerini boş bırakılan yerlere yazınız.

Küme	Kümenin Alt Kümeleri
$A = \{\ \}$	
$B = \{x\}$	
$C = \{x, y\}$	
$D = \{x, y, z\}$	

3. Aşağıda A, B ve C kümeleri Venn şeması yöntemi ile gösterilmiştir. Bu kümeler arasındaki alt küme ilişkileriyle ilgili ifadelerde boş bırakılan yerlere $\subset, \supset$ sembollerinden uygun olanını yerleştiriniz.



I. B......A
II. B......C
III. C......A
IV. A......B
V. C......B
VI. A......C

4. $A = \{3, 5, 7\}$ kümesinin alt küme sayısını ve A kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde 3 elemanı olacağını bulunuz.

5. $A = \{1, 3, 4\}$ ve $B = \{1\}$ kümeleri veriliyor. $A \neq T$ ve $B \subset T \subset A$ olacak şekilde kaç farklı T kümesi yazılabileceğini bulunuz.

6. $A = \{x \mid 4 < x < 8,\ x \in \mathbb{N}\}$ ve $B = \{5, 6, 7\}$ kümeleri verilmiştir. Buna göre A ve B kümelerinin eşit olup olmadıklarını gösteriniz.

7. $A = \{x \mid x$, KIRIKKALE kelimesinin harfleri$\}$ ve $B = \{K, I, R, A, L, E\}$ kümeleri verilmiştir. Buna göre A ve B kümelerinin eşit olup olmadıklarını gösteriniz.

8. A ile B eşit iki küme ve $s(B) = 7$ olduğuna göre $2 \cdot s(A) - s(B)$ değerini bulunuz.

9. Melek Öğretmen öğrencilerine "Eşit kümeler birbirinin alt kümesidir." bilgisini vermiştir. Bu bilgiye göre iki öğrencisinden birer küme söylemelerini istemiştir.

Görsel 2.5

Buna göre Ayşe ve Belma'nın söylediği kümelerin birbirinin alt kümesi olup olmadığını gösteriniz.

10. $A = \{0, a, 4, b, 8\}$ ve $B = \{x \mid x$, çift rakamlar$\}$ kümeleri verilsin. $A = B$ olduğuna göre $a + b$ kaçtır?

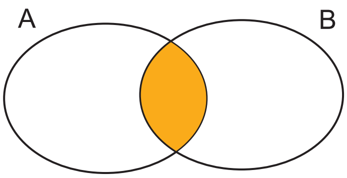
2.2. KÜMELERDE İŞLEMLER

2.2.1. Kümelerde Kesişim, Birleşim, Fark ve Tümleme İşlemleri

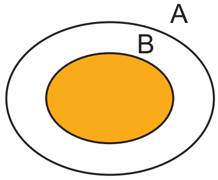
Kümelerde Kesişim İşlemi

A ve B iki küme olmak üzere A ve B kümelerinin ortak elemanlarından oluşan kümeye A ile B kümesinin **kesişim kümesi** denir ve $\mathbf{A \cap B}$ şeklinde gösterilir. "A kesişim B" diye okunur. A ve B kümelerinin kesişim kümesi, ortak özellik yöntemi ile $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in B\}$ şeklinde gösterilir.

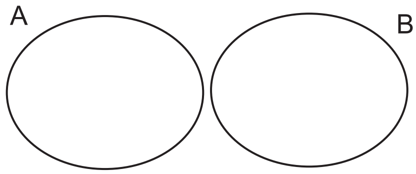
$A \cap B$ kümesinin Venn şeması yöntemi ile gösterimi kümelerin kesişme durumlarına göre aşağıdaki gibidir.



$A \cap B$



$A \cap B = B$



$A \cap B = \varnothing$

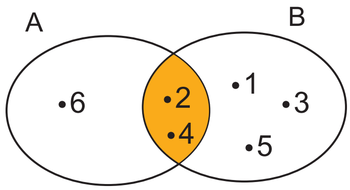
ÖRNEK

$A = \{2, 4, 6\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümeleri verilsin. A ve B kümelerinin ortak elemanlarından oluşan $A \cap B$ kümesini liste ve Venn şeması yöntemi ile gösteriniz.

ÇÖZÜM

A ve B kümelerinin ortak elemanları 2 ve 4 olduğundan $A \cap B$ kümesinin Venn şeması yöntemi ile gösterimi yandaki gibi olur.

$A \cap B$ kümesinin liste yöntemi ile gösterimi ise $A \cap B = \{2, 4\}$ olur.

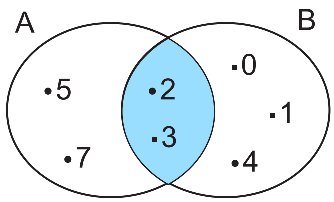


ÖRNEK

$A = \{x \mid x < 10 \text{ ve x asal sayı}\}$ ve $B = \{x \mid x < 5,\ x \in \mathbb{N}\}$ kümeleri veriliyor. $A \cap B$ kümesini liste yöntemi ve Venn şeması ile gösteriniz.

ÇÖZÜM

A kümesindeki elemanlar 10 dan küçük asal sayılar olduğundan A kümesinin liste yöntemi ile gösterimi $A = \{2, 3, 5, 7\}$ şeklindedir. B kümesindeki elemanlar 5 ten küçük doğal sayılar olduğundan $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ şeklinde gösterilir. O hâlde A ve B kümesinin ortak elemanları 2 ve 3 olur.



Bu durumda $A \cap B$ kümesinin liste yöntemi ile gösterimi $A \cap B = \{2, 3\}$ şeklindedir.

ÖRNEK

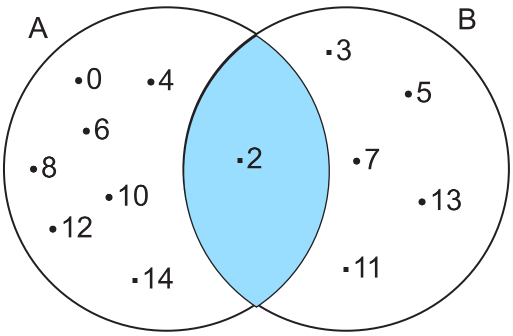
$L = \{x \mid x < 15,\ x \in \mathbb{N}\}$ kümesinin elemanlarından çift sayı olanların kümesi A, asal sayı olanların kümesi B ise $A \cap B$ kümesini liste yöntemi ve Venn şeması ile gösteriniz.

ÇÖZÜM

A ve B kümeleri L kümesinin alt kümesi olur. A kümesindeki elemanlar 15 den küçük çift doğal sayı olduğundan $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ şeklindedir. B kümesindeki elemanlar 15 ten küçük asal sayılar olduğundan $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ şeklinde gösterilir.

Bu durumda $A \cap B$ kümesinin liste yöntemi ile gösterimi $A \cap B = \{2\}$ şeklindedir.

$A \cap B$ kümesinin Venn şeması yöntemi ile gösterimi yanda verilen şekildeki gibidir.



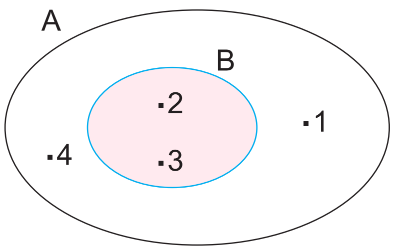
ÖRNEK

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $B = \{2, 3\}$ kümeleri veriliyor.

Buna göre $A \cap B$ kümesini Venn şeması ve liste yöntemi ile gösteriniz.

ÇÖZÜM

$A \cap B$ kümesinin Venn şeması yöntemi ile gösterimi yanda verilen şekildeki gibidir.

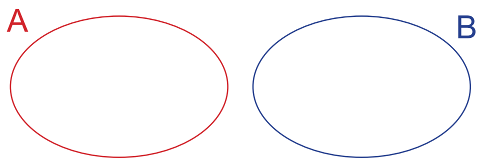


$A \cap B$ kümesinin liste yöntemi ile gösterimi $A \cap B = B = \{2, 3\}$ olur.

Ayrık Kümeler

Ortak elemanı bulunmayan kümelere **ayrık kümeler** denir. Ayrık kümelerin kesişimleri boş kümedir. A ve B iki küme olmak üzere $\mathbf{A \cap B = \varnothing}$ ise A ve B kümeleri ayrık kümelerdir.

A ve B ayrık kümelerinin Venn şeması yöntemi ile gösterimi yandaki gibidir.



ÖRNEK

$K = \{x \mid x < 6,\ x \text{ tek doğal sayı}\}$ ve $L = \{0, 2, 4, 6\}$ kümelerinin ayrık kümeler olup olmadığını gösteriniz.

ÇÖZÜM

İki kümenin ayrık kümeler olabilmesi için ortak elemanlarının olmaması gerekir. K kümesinin elemanlarının liste yöntemiyle gösterimi $K = \{1, 3, 5\}$ olur. $L = \{0, 2, 4, 6\}$ olduğundan K ve L kümelerinin ortak elemanı yoktur. $K \cap L = \varnothing$ olur. O hâlde K ve L kümeleri ayrık kümelerdir.

Kümelerde Kesişim İşleminin Özellikleri

1. $A \cap A = A$ olur. Bir kümenin kendisi ile kesişimi yine kendisidir. Bu özelliğe kümelerde kesişim işleminin tek kuvvet özelliği denir.
2. $A \cap B = B \cap A$ olur. Kümelerde kesişim işleminin değişme özelliği vardır.
3. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ olur. Kümelerde kesişim işleminin birleşme özelliği vardır.
4. $A \cap \varnothing = \varnothing \cap A = \varnothing$ olur. Bir kümenin boş küme ile kesişimi yine boş kümedir.
5. $B \subset A$ ise $A \cap B = B$ olur. B kümesi A kümesinin alt kümesi ise A kümesi ile B kümesinin kesişimi B kümesidir.

ÖRNEK

A ve B iki küme olmak üzere $A \cap B = \{2, 4, 5, 7\}$ olduğuna göre $B \cap A$ kümesini liste yöntemi ile yazınız.

ÇÖZÜM

Kümelerde kesişim işleminin değişme özelliği olduğundan $A \cap B = B \cap A$ olur.
Bu durumda $B \cap A = \{2, 4, 5, 7\}$ bulunur.

ÖRNEK

A, B ve C birer küme olmak üzere $A=\{a,b,c\}$, $B\cap C=\{b,c,d,e\}$ ise $(A\cap B)\cap C$ kümesini liste yöntemi ile yazınız.

ÇÖZÜM

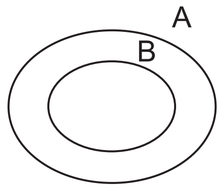
A, B ve C kümeleri için $A\cap(B\cap C)=\{b,c\}$ dir. Kesişim işleminin birleşme özelliği olduğundan $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ olur. Bu durumda $(A\cap B)\cap C=\{b,c\}$ bulunur.

ÖRNEK

A ve B birer küme olmak üzere $s(A)=16$ ve $s(B)=5$ olduğuna göre $s(A\cap B)$ nın alacağı en büyük değeri bulunuz.

ÇÖZÜM

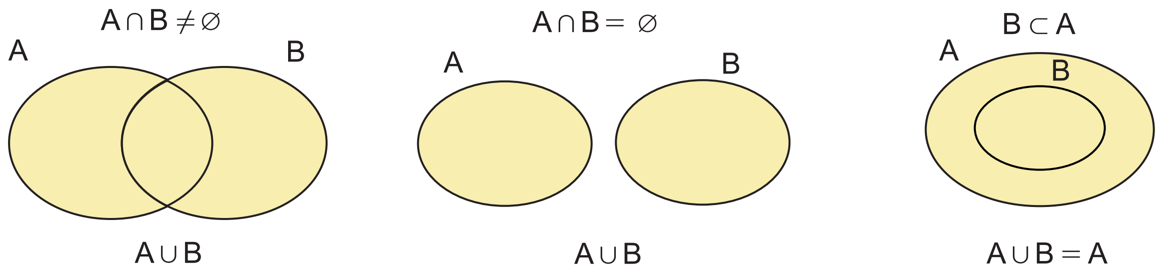
B kümesi A kümesinin alt kümesi olduğunda $A\cap B=B$ olacağından $s(A\cap B)$ en büyük değerini alır. Bu durumda $s(A\cap B)=s(B)=5$ bulunur.



Kümelerde Birleşim İşlemi

A ve B iki küme olmak üzere A ve B kümelerinin bütün elemanlarından oluşan kümeye A ile B kümesinin **birleşim kümesi** denir. $A\cup B$ şeklinde gösterilir ve "A birleşim B" olarak okunur. A ve B kümelerinin birleşim kümesi, ortak özellik yöntemi ile $A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ veya } x\in B\}$ şeklinde gösterilir.

A ve B kümelerinin durumlarına göre $A\cup B$ kümesinin Venn şeması yöntemi ile gösterimi aşağıdaki gibidir.



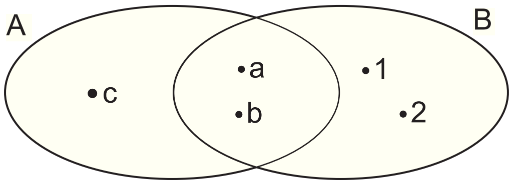
ÖRNEK

$A=\{a,b,c\}$ ve $B=\{1,2,a,b\}$ kümeleri verilmiştir. $A\cup B$ kümesini liste ve Venn şeması yöntemi ile gösteriniz.

ÇÖZÜM

A ve B kümelerinin tüm elemanlarından oluşan $A \cup B$ kümesinin liste yöntemi ile gösterimi $A \cup B = \{a, b, c, 1, 2\}$ olur. A ve B kümelerinin ortak elemanları olan a ve b elemanları $A \cup B$ kümesinin içine yalnızca bir defa yazılır.

$A \cup B$ kümesinin Venn şeması yöntemi ile gösterimi aşağıdaki gibidir.



ÖRNEK

$C = \{x \mid x < 24,\ x \text{ bir asal sayıdır}\}$ ve $D = \{y \mid y < 12,\ y \in \mathbb{N}\}$ kümeleri için $C \cup D$ kümesini liste yöntemi ile gösteriniz.

ÇÖZÜM

C kümesi, 24 den küçük asal sayılar ise $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$ ve
D kümesi, 12 den küçük doğal sayılar ise $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ olur.
C ve D kümelerinin tüm elemanlarından oluşan $C \cup D$ kümesinin liste yöntemi ile gösterimi

$C \cup D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 17, 19, 23\}$ olur.

ÖRNEK

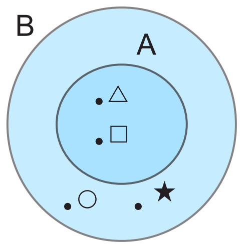
$A = \{\triangle, \square\}$ ve $B = \{\triangle, \square, \bigcirc, \bigstar\}$ kümeleri için $A \cup B$ kümesini liste ve Venn şeması yöntemi ile gösteriniz.

ÇÖZÜM

A ve B kümelerinin tüm elemanlarından oluşan küme $A \cup B = \{\triangle, \square, \bigcirc, \bigstar\}$ şeklinde yazılır. $A \cup B$ ve B kümesinin elemanları aynı olduğundan $A \cup B = B$ dir.

Bu durumda $A \cup B$ kümesinin Venn şeması yöntemi ile gösterimi yandaki gibidir.

A kümesinin her elemanı B kümesinin de elemanı olduğundan A kümesi B kümesinin alt kümesidir. $A \subset B$ dir.

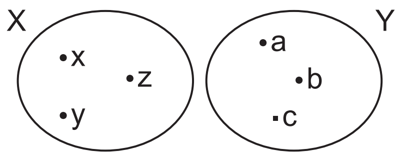


2. ÜNİTE: KÜMELER

ÖRNEK

$X=\{x,y,z\}$ ve $Y=\{a,b,c\}$ kümelerini Venn şeması yöntemi ile gösteriniz ve $X\cup Y$ kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM



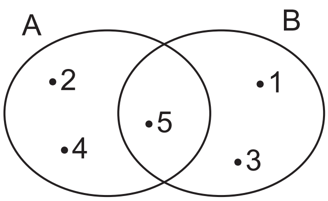
$X\cap Y=\varnothing$ olduğundan X ve Y kümeleri ayrık kümelerdir.

X ve Y kümeleri ortak eleman içermediğinden Venn şeması ile gösterimi yandaki gibidir.

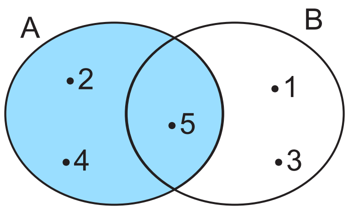
$X\cup Y=\{x,y,z,a,b,c\}$ olur.

ÖRNEK

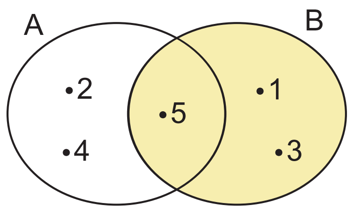
Aşağıda verilen şekle göre A, B, $A\cap B$, $A\cup B$ kümelerini liste ve Venn şeması yöntemi ile gösteriniz.



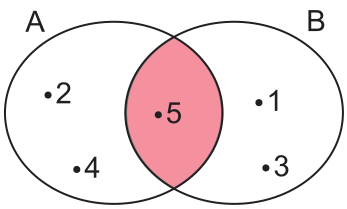
ÇÖZÜM



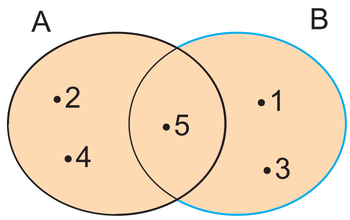
A kümesi şekilde boyalı bölge ile gösterilmiştir. A kümesinin liste yöntemi ile gösterimi $A=\{2,4,5\}$ olur.



B kümesi şekilde boyalı bölge ile gösterilmiştir. B kümesinin liste yöntemi ile gösterimi $B=\{1,3,5\}$ olur.



$A\cap B$ kümesi şekilde boyalı bölge ile gösterilmiştir. $A\cap B$ kümesinin liste yöntemi ile gösterimi $A\cap B=\{5\}$ olur.



$A\cup B$ kümesi şekilde boyalı bölge ile gösterilmiştir. $A\cup B$ kümesinin liste yöntemi ile gösterimi $A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$ olur.

Kümelerde Birleşim İşleminin Özellikleri

1. $A \cup A = A$ olur. Bir kümenin kendisi ile birleşimi yine kendisidir. Bu özelliğe kümelerde birleşim işleminin tek kuvvet özelliği denir.
2. $A \cup B = B \cup A$ olur. Kümelerde birleşim işleminin değişme özelliği vardır.
3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ olur. Kümelerde birleşim işleminin birleşme özelliği vardır.
4. $A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A$ olur. Bir kümenin boş küme ile birleşimi yine kendisidir.
5. $B \subset A$ ise $A \cup B = A$ dır.

ÖRNEK

A ve B iki küme olmak üzere $A \cup B = \{0, 1, 3, 4\}$ olduğuna göre $B \cup A$ kümesini liste yöntemi ile gösteriniz.

ÇÖZÜM

Kümelerde birleşim işleminin değişme özelliği olduğundan $A \cup B = B \cup A$ dır. Bu durumda $B \cup A = \{0, 1, 3, 4\}$ olur.

ÖRNEK

A, B ve C birer küme olmak üzere $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B \cup C = \{2, 3, 4, 5\}$ olduğuna göre $(A \cup B) \cup C$ kümesini liste yöntemi ile gösteriniz.

ÇÖZÜM

A, B ve C kümeleri için $A \cup (B \cup C) = \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ dir. Kümelerde birleşim işleminin birleşme özelliği olduğundan $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ dir. Bu durumda $(A \cup B) \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ bulunur.

ÖRNEK

A ve B kümeleri için $s(A) = 7$ ve $s(B) = 4$ olduğuna göre $A \cup B$ kümesinin eleman sayısının <u>en küçük</u> değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

A ve B kümeleri için $s(A \cup B)$ değerinin en küçük olacağı durum B kümesinin A kümesinin alt kümesi olacağı durumdur. $(B \subset A)$

Bu durumda $A \cup B = A$ ve $s(A \cup B) = s(A) = 7$ bulunur.

Kesişim İşleminin Birleşim İşlemi Üzerine Dağılma Özelliği

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ şeklindedir.

ÖRNEK

A, B ve C kümeleri için $A \cap B = \{3, 5, 7\}$, $A \cap C = \{1, 2, 3, 4\}$ olduğuna göre $A \cap (B \cup C)$ kümesini liste yöntemi ile gösteriniz.

ÇÖZÜM

$A \cap (B \cup C)$ ifadesinde kesişim işleminin birleşim işlemi üzerine dağılma özelliği kullanıldığında
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ olur.
$A \cap B = \{3,5,7\}$ ve $A \cap C = \{1,2,3,4\}$ olduğundan
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1,2,3,4,5,7\}$ bulunur.

Birleşim İşleminin Kesişim İşlemi Üzerine Dağılma Özelliği

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ şeklindedir.

ÖRNEK

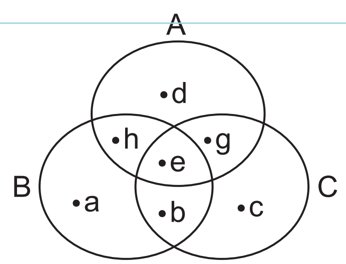
A, B ve C kümeleri için $A \cup B = \{k, l, m, n\}$, $A \cup C = \{m, n, o, p\}$ olduğuna göre $A \cup (B \cap C)$ kümesini liste yöntemi ile gösteriniz.

ÇÖZÜM

$A \cup (B \cap C)$ ifadesinde birleşim işleminin kesişim işlemi üzerine dağılma özelliği kullanıldığında
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ olur.
$A \cup B = \{k, l, m, n\}$ ve $A \cup C = \{m, n, o, p\}$ olduğundan
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) = \{m, n\}$ bulunur.

ÖRNEK

A, B ve C kümeleri yandaki gibi verilmiştir.
Buna göre $A \cup (B \cap C)$ kümesinin elemanlarını bulunuz.



ÇÖZÜM

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A = \{d, h, e, g\}$, $B = \{a, b, e, h\}$, $C = \{b, e, g, c\}$ olduğundan
$A \cup B = \{a, b, d, e, h, g\}$, $A \cup C = \{b, c, d, h, e, g\}$ olur.
$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{d, h, e, g, b\}$ bulunur.

Kümelerde Fark İşlemi

A ve B iki küme olmak üzere A kümesinde olup B kümesinde olmayan elemanlardan oluşan kümeye **A fark B kümesi** denir. $A - B$ veya $A \setminus B$ şeklinde gösterilir ve "A fark B" diye okunur.

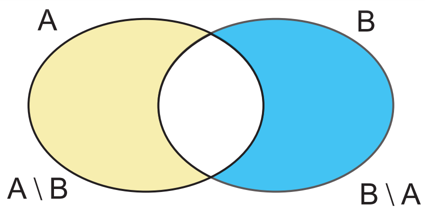
$A \setminus B$ ve $B \setminus A$ kümesi ortak özellik yöntemi ile aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \notin B\}$$

$$B \setminus A = \{x \mid x \in B \text{ ve } x \notin A\}$$

$A \setminus B$ ve $B \setminus A$ kümelerinin

Venn şeması ile gösterimi yandaki gibidir.



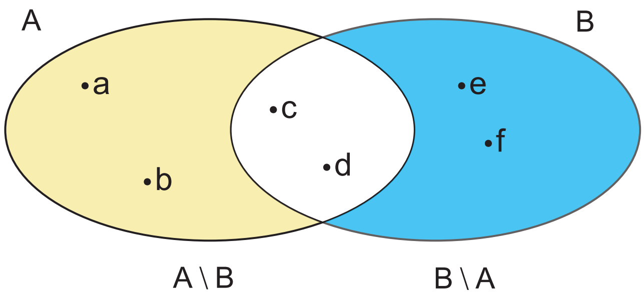
ÖRNEK

$A = \{a, b, c, d\}$ ve $B = \{c, d, e, f\}$ kümeleri verilsin. Buna göre $A \setminus B$ ve $B \setminus A$ kümelerini liste ve Venn şeması yöntemi ile gösteriniz.

ÇÖZÜM

A kümesinde olup B kümesinde olmayan elemanlar a ve b dir. Bu durumda $A \setminus B$ kümesinin liste yöntemi ile gösterimi $A \setminus B = \{a, b\}$ olur.

B kümesinde olup A kümesinde olmayan elemanlar e ve f dir. Bu durumda $B \setminus A$ kümesinin liste yöntemi ile gösterimi $B \setminus A = \{e, f\}$ olur.



Yandaki Venn şemasında sarıya boyalı bölge ile $A \setminus B$ kümesi, maviye boyalı bölge ile de $B \setminus A$ kümesi gösterilmiştir.

ÖRNEK

$A = \{x \mid x < 6,\ x \in \mathbb{N}\}$ ve $B = \{x \mid 6 \leq x < 9,\ x \in \mathbb{Z}\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre $A \setminus B$ ve $B \setminus A$ kümelerini liste yöntemi ile gösteriniz.

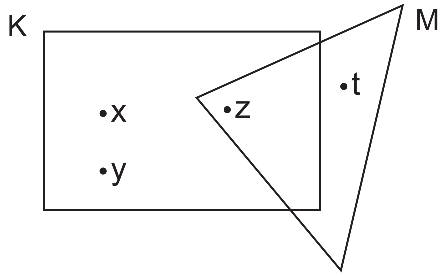
ÇÖZÜM

A ve B kümeleri liste yöntemi ile $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{6, 7, 8\}$ şeklinde olur.
A kümesinde olup B kümesinde olmayan elemanlar 0, 1, 2, 3, 4 ve 5 dir. Bu durumda $A \setminus B$ kümesinin liste yöntemi ile gösterimi $A \setminus B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ olur. B kümesinde olup A kümesinde olmayan elemanlar 6, 7 ve 8 dir. Bu durumda $B \setminus A$ kümesinin liste yöntemi ile gösterimi $B \setminus A = \{6, 7, 8\}$ olur.

ÖRNEK

K ve M kümelerinin Venn şeması yöntemi ile gösterimi yanda verilmiştir.

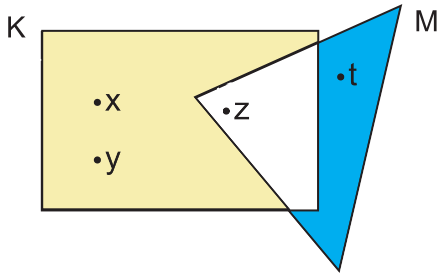
Buna göre $K-M$ ve $M-K$ kümelerini liste yöntemi ile yazınız.



ÇÖZÜM

Sarı renge boyalı bölge $K-M$ kümesidir. Bu bölgede x ve y elemanı bulunduğundan $K-M=\{x,y\}$ şeklinde yazılır.

Mavi renge boyalı bölge $M-K$ kümesidir. Bu bölgede t elemanı bulunduğundan $M-K=\{t\}$ şeklinde yazılır.

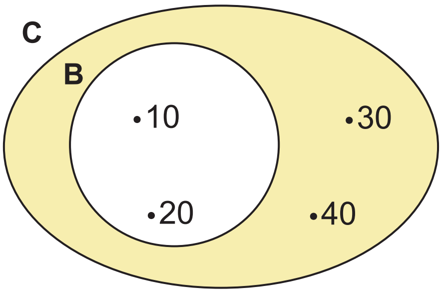


ÖRNEK

$B=\{10,20\}$ ve $C=\{10,20,30,40\}$ kümeleri verilsin. $B-C$ ve $C-B$ kümelerini liste ve Venn şeması yöntemi ile gösteriniz.

ÇÖZÜM

B kümesinde olup C kümesinde olmayan eleman yoktur. Bu durumda $B-C=\varnothing$ dir.
C kümesinde olup B kümesinde olmayan elemanlar 30 ve 40 tır. Bu durumda $C-B=\{30,40\}$ olur.
B kümesinin her elemanı C kümesinin de elemanı olduğundan B kümesi C kümesinin içinde gösterilir. Boyalı bölge $C-B$ kümesini gösterir.



Kümelerde Fark İşleminin Özellikleri

A ve B kümeleri E evrensel kümesinin birer alt kümesi olmak üzere

1. $A\neq B$ ise $A\setminus B\neq B\setminus A$ dır. Fark işleminin değişme özelliği yoktur.
2. $A\setminus A=\varnothing$ olur. Bir kümenin kendisinden farkı boş kümedir.
3. $A\setminus E=\varnothing$ olur. A kümesinin E evrensel kümesinden farkı boş kümedir.
4. $A\setminus\varnothing=A$ olur. A kümesinin boş kümeden farkı yine kendisidir.
5. $A\subset B$ ise $A\setminus B=\varnothing$ olur. A kümesi B kümesinin alt kümesi ise A kümesinin B kümesinden farkı boş kümedir.

ÖRNEK

$A=\{11,12,13,14\}$ ve $B=\{12,14,15\}$ olduğuna göre $A-B$ ve $B-A$ kümelerinin eşit küme olup olmadıklarını inceleyiniz.

ÇÖZÜM

$A=\{11,12,13,14\}$ ve $B=\{12,14,15\}$ olmak üzere $A-B=\{11,13\}$ ve $B-A=\{15\}$ olduğundan $A-B \neq B-A$ olur.

ÖRNEK

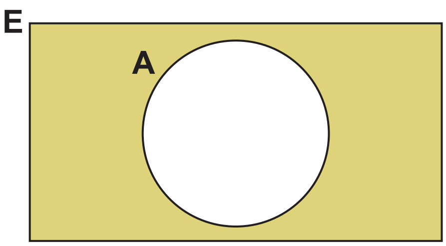
A bir küme olmak üzere $(A \setminus A) \cup (A \setminus \varnothing)$ ifadesinin en sade şeklini yazınız.

ÇÖZÜM

A bir küme olmak üzere $A \setminus A=\varnothing$ ve $A \setminus \varnothing = A$ eşitlikleri $(A \setminus A) \cup (A \setminus \varnothing)$ ifadesinde yerine yazılırsa $\varnothing \cup A = A$ olur.

Kümelerde Tümleme İşlemi

Bir E evrensel kümesinin bir alt kümesi A olsun. Evrensel kümede olup A kümesinde olmayan elemanlardan oluşan kümeye **A kümesinin tümleyeni** denir ve A' biçiminde gösterilir.



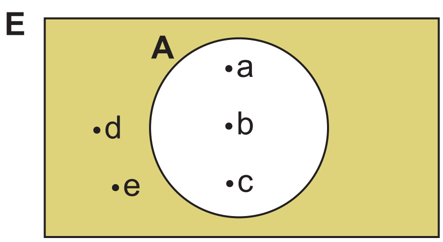
Yandaki boyalı bölge A kümesinin tümleyeninin Venn şeması yöntemi ile gösterimidir.

ÖRNEK

$E=\{a,b,c,d,e\}$ ve $A=\{a,b,c\}$ kümelerini Venn şeması yöntemi ile gösteriniz ve A' kümesini liste yöntemi ile yazınız.

ÇÖZÜM

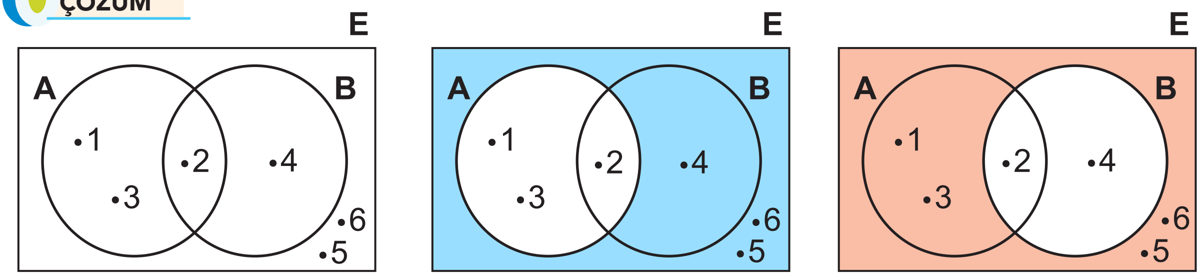
A kümesinin bütün elemanları E kümesinin de elemanları olduğundan $A \subset E$ dir. Venn şemasında boyalı bölgenin A' olduğu görülür. E kümesinde olup A kümesinde olmayan elemanlardan oluşan A' kümesinin liste yöntemi ile gösterimi $A'=\{d,e\}$ olur.



ÖRNEK

$E=\{1,2,3,4,5,6\}$ evrensel kümesi ile $A=\{1,2,3\}$ ve $B=\{2,4\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre A, B ve E kümelerini Venn şeması ile gösteriniz. A' ve B' kümelerini de liste yöntemi ile yazınız.

ÇÖZÜM



E, A ve B kümelerinin Venn şeması ile gösterimi yukarıdaki gibi olur.

A' kümesi mavi boyalı bölge ile gösterilmiştir. Boyalı bölge içindeki elemanlar 4, 5 ve 6 dır. Bu durumda A' kümesinin liste yöntemi ile gösterimi $A'=\{4,5,6\}$ şeklinde olur.

B' kümesi turuncu boyalı bölge ile gösterilmiştir. Boyalı bölge içindeki elemanlar 1, 3, 5 ve 6 dır. B' kümesinin liste yöntemi ile gösterimi $B'=\{1,3,5,6\}$ şeklinde olur.

Kümelerde Tümleme İşleminin Özellikleri

A ve B kümeleri E evrensel kümesinin birer alt kümesi olmak üzere

1. $(A')'=A$ olur. Bir kümenin tümleyeninin tümleyeni yine kendisidir.
2. $\varnothing'=E$ ve $E'=\varnothing$ olur. Boş kümenin tümleyeni evrensel küme, evrensel kümenin tümleyeni boş kümedir.
3. $A\cup A'=E$ ve $A\cap A'=\varnothing$ olur. Bir kümenin kendisi ile tümleyeninin birleşimi evrensel küme, kesişimi ise boş kümedir.
4. $A'\cup E=E$ ve $A'\cap E=A'$ olur. Bir kümenin tümleyeniyle evrensel kümenin birleşimi evrensel küme, kesişimi ise kümenin tümleyenidir.
5. $A\subset B$ ise $B'\subset A'$ olur. A kümesi B kümesinin alt kümesi ise B kümesinin tümleyeni A kümesinin tümleyeninin alt kümesidir.
6. $A\setminus A'=A$ olur. Bir kümenin kendisi ile tümleyeninin farkı kümenin kendisidir.
7. $E\setminus A=A'$ olur. Evrensel kümenin bir A kümesinden farkı A kümesinin tümleyenidir.
8. $A\setminus E=\varnothing$ olur. Bir A kümesinin evrensel küme ile farkı boş kümedir.
9. $s(E)=s(A)+s(A')$ olur. Bir kümenin eleman sayısı ile tümleyeninin eleman sayısı toplamı evrensel kümenin eleman sayısına eşittir.
10. $(A\cap B)'=A'\cup B'$ ve $(A\cup B)'=A'\cap B'$ olur.

ÖRNEK

Yandaki şemaya göre aşağıdaki örnekleri cevaplayınız.

a) A' kümesini,

b) $(A')'$ kümesini,

c) $A \cap A'$ kümesini,

ç) $A \cup A'$ kümesini,

d) $A' \cup E$ kümesini,

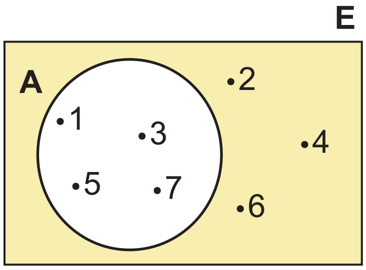
e) $A' \cap E$ kümesini,

f) $A \setminus A'$ kümesini,

g) $E \setminus A$ kümesini,

ğ) $A \setminus E$ kümesini,

h) $s(A) + s(A')$ nı bulunuz.



ÇÖZÜM

a) İstenen A kümesinin dışında kalan tüm elemanların oluşturduğu küme $A' = \{2, 4, 6\}$ olur.

b) $A' = \{2, 4, 6\}$ kümesinde olmayıp E kümesinde olan elemanların oluşturduğu küme $(A')' = \{1, 3, 5, 7\}$ olur.

c) $A \cap A' = \{1, 3, 5, 7\} \cap \{2, 4, 6\} = \varnothing$ olur.

ç) $A \cup A' = \{1, 3, 5, 7\} \cup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = E$ olur.

d) $A' \cup E = \{2, 4, 6\} \cup \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = E$ olur.

e) $A' \cap E = \{2, 4, 6\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{2, 4, 6\} = A'$ olur.

f) $A = \{1, 3, 5, 7\}$ kümesinde olup $A' = \{2, 4, 6\}$ kümesinde olmayan elemanların oluşturduğu küme $A \setminus A' = \{1, 3, 5, 7\} = A$ olur.

g) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesinde olup $A = \{1, 3, 5, 7\}$ kümesinde olmayan elemanların oluşturduğu küme $E \setminus A = \{2, 4, 6\} = A'$ olur.

ğ) $A = \{1, 3, 5, 7\}$ kümesinde olup $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesinde olmayan eleman bulunmadığından $A \setminus E = \varnothing$ olur.

h) $A = \{1, 3, 5, 7\}$ ve $s(A) = 4$ ayrıca $A' = \{2, 4, 6\}$ ve $s(A') = 3$ olduğundan $s(A) + s(A') = 4 + 3 = 7$ olur. Bu durumda $s(A) + s(A') = s(E)$ olur.

ÖRNEK

A kümesi, E evrensel kümesinin alt kümesi olduğuna göre $(A' \cap E) \cup E$ ifadesinin en sade şeklini yazınız.

ÇÖZÜM

$A \subset E$ olduğundan $A' \cap E = A'$ olur. Bu eşitlik $(A' \cap E) \cup E$ ifadesinde yerine yazılırsa $A' \cup E = E$ olur.

ÖRNEK

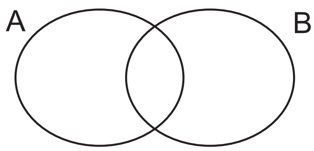
A ve B kümesi E evrensel kümesinin iki alt kümesi olduğuna göre $(A \cap B)' \cup B$ ifadesinin en sade şeklini yazınız.

ÇÖZÜM

A ve B, E evrensel kümesinin iki alt kümesi ise $(A \cap B)' = A' \cup B'$ eşitliği $(A \cap B)' \cup B$ ifadesinde yerine yazıldığında $(A' \cup B') \cup B$ olur. Birleşim işleminin birleşme özelliği olduğundan $(A' \cup B') \cup B = A' \cup (B' \cup B) = A' \cup E = E$ bulunur.

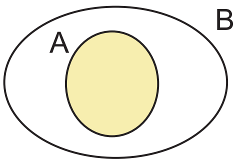
İki Kümenin Birleşiminin Eleman Sayısı

$A, B \subset E$ olmak üzere $A \cup B$ kümesinin eleman sayısı $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$ eşitliği ile bulunur.



$A \cap B \neq \varnothing$

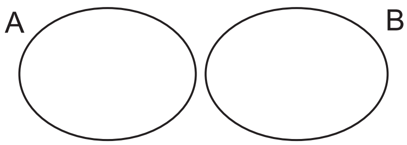
Özel olarak



$A \subseteq B$ olması

durumunda

$s(A \cup B) = s(B)$



$A \cap B = \varnothing$

(A ve B ayrık kümeler)
olması durumunda

$s(A \cup B) = s(A) + s(B)$

ÖRNEK

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $B = \{a, b, c\}$ kümeleri veriliyor. $A \cup B$ kümesinin eleman sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

A ve B kümelerinin ortak elemanı olmadığından kümeler ayrık kümelerdir.

A kümesinin eleman sayısı, $s(A) = 4$ ve B kümesinin eleman sayısı $s(B) = 3$ olduğundan

$A \cup B$ kümesinin eleman sayısı $s(A \cup B) = s(A) + s(B)$

$s(A \cup B) = 4 + 3$

$s(A \cup B) = 7$ bulunur.

ÖRNEK

$A=\{7,8,9,10\}$ ve $B=\{3,4,5,6,7,8\}$ kümeleri verilsin. $A\cup B$ kümesinin eleman sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

A ve B kümelerinin ortak elemanları 7 ve 8 dir. $A\cap B$ kümesinin eleman sayısı $s(A\cap B)=2$, $s(A)=4$ ve $s(B)=6$ olur. Bu durumda $A\cup B$ kümesinin eleman sayısı;

$s(A\cup B)=s(A)+s(B)-s(A\cap B)$
$s(A\cup B)=4+6-2$
$s(A\cup B)=10-2$
$s(A\cup B)=8$ bulunur.

ÖRNEK

Herkesin en az bir müzik aleti çaldığı bir müzik kursunda gitar çalanların sayısı 12, piyano çalanların sayısı 10, her iki müzik aletini de çalanların sayısı 5 tir. Buna göre müzik kursunda kaç kişinin olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Gitar çalanların kümesini G, piyano çalanların kümesini P ile gösterelim. $s(G)=12$, $s(P)=10$ ve $s(G\cap P)=5$ olur.

Müzik kursundaki kişilerin oluşturduğu küme $G\cup P$ dir. Bu durumda müzik kursundaki kişi sayısı;

$s(G\cup P)=s(G)+s(P)-s(G\cap P)$
$s(G\cup P)=12+10-5$
$s(G\cup P)=22-5$
$s(G\cup P)=17$ bulunur.

ÖRNEK

27 kişilik bir sınıfta her öğrenci bilgisayar veya tabletten en az birine sahiptir. Sınıfta bilgisayarı olan 15, tableti olan 18 öğrenci olduğuna göre hem bilgisayarı hem tableti olan öğrenci sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

Bilgisayarı olanların kümesi B, tableti olanların kümesi T ile gösterilirse $s(B)=15$, $s(T)=18$ olur.

Hem bilgisayarı hem de tableti olan öğrencilerin kümesi $B\cap T$ dir. Sınıf mevcudu $B\cup T$ olacağından

$s(B\cup T)=s(B)+s(T)-s(B\cap T)$
$27=15+18-s(B\cap T)$
$27=33-s(B\cap T)$
$s(B\cap T)=33-27$
$=6$ bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1. $A = \{x \mid 1 < x < 7,\ x \in \mathbb{N}\}$

$B = \{x \mid x$ tek doğal sayı$\}$

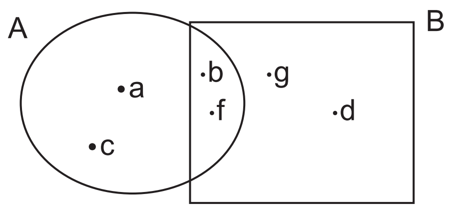
kümeleri veriliyor. Buna göre $A \cap B$ kümesini liste yöntemi ile gösteriniz.

2. $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$B = \{5, 6, 7, 8\}$

kümeleri veriliyor. Buna göre $A \cap B$ ve $A \cup B$ kümelerini liste yöntemi ile gösteriniz.

3. Aşağıdaki şemaya göre A, B ve $A \cap B$ kümelerini liste yöntemi ile gösteriniz.



4. $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{2, 4, 6, 8\}$ olduğuna göre $A \cup B$ kümesini liste yöntemi ve Venn şemasıyla gösteriniz.

5. $A = \{x, y, z, t\}$ ve $B = \{a, b, c\}$ olduğuna göre $A \cap B$ kümesini yazarak A ile B kümelerinin ayrık kümeler olup olmadıklarını gösteriniz.

6. $A = \{2, 3, 5, 6\}$
$B = \{1, 2, 3\}$
$C = \{2, 3, 5, 7\}$
kümeleri veriliyor. Buna göre $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ kümesini liste yöntemi ile gösteriniz.

7. A bir küme olmak üzere $(A \setminus A) \cap (A \cup \varnothing)$ ifadesini en sade şekilde yazınız.

8. $A = \{P, R, S, U, T\}$ ve $B = \{S, P, O, R\}$ olduğuna göre $A \setminus B$ ve $B \setminus A$ kümelerini liste yöntemi ile gösteriniz.

9. A ve B birer küme olmak üzere $s(A \setminus B) = 7$, $s(B \setminus A) = 8$ ve $s(A \cap B) = 3$ olduğuna göre $A \cup B$ kümesinin eleman sayısını bulunuz.

10. $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ evrensel kümesi içinde $A = \{2, 4, 6\}$ kümesi veriliyor. Buna göre A' kümesini liste yöntemi ile gösteriniz.

11. A ve B birer küme olmak üzere $s(A) = 23$, $s(B) = 20$ ve $s(A \cap B) = 11$ olduğuna göre $A \cup B$ kümesinin eleman sayısını bulunuz.

12. Herkesin futbol veya basketbol oynadığı 30 kişilik bir sınıfta 17 kişi futbol, 20 kişi basketbol oynamaktadır. Sınıfta her iki sporu da oynayan öğrencilerin sayısını bulunuz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

1. I. Türkiye'nin Karadeniz'e kıyısı olan illeri
II. Haftanın Z harfi ile başlayan günleri
III. En ünlü yazarlar
IV. 2 den küçük asal sayılar
V. Balıkesir'in en güzel ilçeleri

Yukarıda verilen ifadelerden hangileri bir küme belirtmez?

A) II ve III B) II, III ve IV C) III ve IV D) III ve V E) IV ve V

2. "MESLEKİ TEKNİK" kelimelerinin harflerinden oluşan küme kaç elemanlıdır?

A) 13 B) 10 C) 9 D) 8 E) 7

3. $s(A \setminus B) = 5$, ve $s(A \cup B) = 12$ olduğuna göre $s(B)$ değeri kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 7 D) 8 E) 9

4. $A = \{x \mid x < 8, x \in \mathbb{N}\}$
$B = \{1, 3, 5, 6, 8, 9, 10\}$
$C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
Kümeleri veriliyor.

Buna göre $(A \cap B) \setminus C$ kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{1\}$ B) $\{1,7\}$ C) $\{1,6,7\}$ D) $\{6,7\}$ E) $\{8,9,10\}$

5. "ELEKTRİK" kelimesini oluşturan harflerin kümesi A, "ELEKTRONİK" kelimesini oluşturan harflerin kümesi B dir.
Buna göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $A \cap B = \{E, L, K, T, R, İ\}$
B) $B \setminus A = \varnothing$
C) $s(A \cup B) = 9$
D) $A \supseteq B$
E) A ve B ayrık kümelerdir.

6. $A = \{a, b, c\}$ kümesi veriliyor.

Buna göre aşağıdakilerden hangisi A kümesinin bir alt kümesi değildir?

A) $\{a\}$ B) $\{a,b\}$ C) $\{c,d\}$ D) $\{a,b,c\}$ E) $\varnothing$

7. $A = \{1, 3, a, b, 9,\}$
$B = \{x \mid x,\ \text{tek rakamlar}\}$
kümeleri veriliyor.

$A = B$ olduğuna göre $a + b$ kaçtır?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 15

8. $A = \{x \mid 5 \le x \le 36$ ve x 3 ün katı$\}$
$B = \{x \mid 8 < x \le 48$ ve x çift sayı$\}$
kümeleri veriliyor.
Buna göre $s(A \cap B)$ değeri kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

9. $A = \{1, 3, 5, 6\}$
$B = \{3, 7, 8, 9\}$
$C = \{5, 6, 7, 8\}$
$D = \{1, 6, 7, 9\}$ kümeleri veriliyor.

Buna göre aşağıdakilerden hangisinin eleman sayısı en fazladır?

A) $C \cup D$ B) $B \cup C$ C) $A \cup D$ D) $B \cup D$ E) $A \cup B$

10. A kümesinin 8, B kümesinin 10 elemanı vardır.

Buna göre $A \cup B$ kümesinin eleman sayısı en az kaçtır?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 16 E) 18

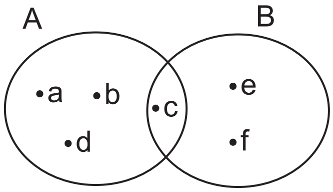
11. Esra Öğretmen, beş öğrencisinden boş kümeye bir örnek vermelerini istemiştir. Ahmet, Esin, Cem, Deniz ve Zeynep'in verdikleri örnekler aşağıdaki gibidir.

Ahmet: R harfi ile başlayan illerimiz
Esin: Sıfırdan küçük tam sayılar
Cem: Haftanın 5 harfli günleri
Deniz: 5 e bölünebilen rakamlar
Zeynep: C harfi ile başlayan illerimiz

Buna göre öğrencilerden hangisi boş kümeye örnek vermiştir?

A) Ahmet B) Esin C) Cem D) Deniz E) Zeynep

12.



Yukarıda A ve B kümeleri Venn şeması ile gösterilmiştir.

Buna göre aşağıdakilerden hangisi <u>yanlıştır</u>?

A) $s(A)+s(A\cap B)=5$
B) $s(A\setminus B)+s(B)=6$
C) $A\cup B=\{a,b,c,d,e,f\}$
D) $B\setminus A=\{e,f\}$
E) $A=\{x \mid x \text{ alfabenin ilk 5 harfi}\}$

13. $A=\{7,9,11,13,15\}$ kümesinin ortak özellik yöntemi ile gösterimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{x \mid 6<x<16 \text{ ve x tek doğal sayı}\}$
B) $\{x \mid 7<x<15 \text{ ve x tek doğal sayı}\}$
C) $\{x \mid 6<x<15 \text{ ve x tek doğal sayı}\}$
D) $\{x \mid 7<x\leq 18 \text{ ve x tek doğal sayı}\}$
E) $\{x \mid 7\leq x\leq 18 \text{ ve x tek doğal sayı}\}$

14. $A=\{x \mid x<5 \text{ ve x tam sayı}\}$
$B=\{x \mid x>9 \text{ ve x doğal sayı}\}$
$C=\{x \mid x<100 \text{ ve x asal sayı}\}$
$D=\{x \mid 5<x<6 \text{ ve x gerçek sayı}\}$
kümeleri veiliyor.

Buna göre A, B, C ve D kümelerinden hangileri sonlu kümedir?

A) A ve C B) Yalnız C C) B ve C D) Yalnız D E) C ve D

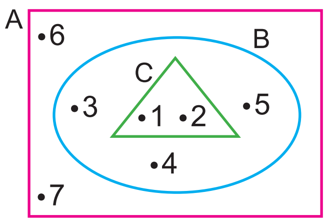
15. A ve B kümeleri veriliyor.
$B\setminus A=\varnothing$ olduğuna göre

I. $A=B$
II. $A\cup B=B$
III. $A\subseteq B$
IV. $A\cap B=A$
V. $A\cap B=B$

ifadelerinden kaç tanesi <u>kesinlikle</u> doğrudur?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

16.



Yukarıdaki Venn şemasında A, B ve C kümeleri gösterilmiştir.

Buna göre aşağıdakilerden hangisi <u>yanlıştır?</u>

A) $C\subset B$ B) $B\subset(A\setminus B)$
C) $C\subset(A\cap B)$ D) $A\supset(B\cup C)$
E) $B\subset(A\cap B)$

17. A ve B iki kümedir.
$s(A)=3x-4$, $s(B)=5x-7$
$s(A\cap B)=5$ ve $s(A\cup B)=16$
olduğuna göre $s(B)-s(A)$ kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

18. $A = \{x \mid 2 \le x \le 12 \text{ ve } x \in \mathbb{Z}\}$
$B = \{x \mid 7 \le x < 16 \text{ ve } x \in \mathbb{N}\}$
$C = \{3, 4, 6, 10, 11, 12, 15\}$
kümeleri veriliyor.
Buna göre $(A \setminus B) \setminus (C \setminus B)$ kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{2, 5\}$ B) $\{2, 3\}$ C) $\{2, 3, 5\}$
D) $\{2, 4, 5\}$ E) $\{10, 11\}$

19. $A = \{c, d, e, f, 2, 3, 5, 7\}$
$B = \{a, b, c, e, 3, 5, 8\}$
kümeleri veriliyor.
Buna göre $s(A \setminus B) + s(B \setminus A) + s(A \cap B)$ kaçtır?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

20. $E = \{x \mid x < 30$ ve x, 3 ile bölünebilen doğal sayı$\}$ evrensel kümesi ve
$A = \{0, 3, 12, 15, 24, 27\}$ kümesi veriliyor.

Buna göre A' kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{6, 9, 18\}$
B) $\{6, 9, 18, 21, 30\}$
C) $\{9, 18, 21, 27\}$
D) $\{6, 9, 18, 21\}$
E) $\varnothing$

21. A, B ve C kümeleri için $A \cap B = \{a, b, c\}$ ve $A \cap C = \{b, c, d, e\}$ olduğuna göre $A \cap (B \cup C)$ kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{b\}$ B) $\{b, c\}$ C) $\{a, b, c\}$
D) $\{a, b, c, d\}$ E) $\{a, b, c, d, e\}$

22. $A = \{x \mid x < 12$ ve x tek doğal sayı$\}$
$B = \{1, 3, 9, x\}$ kümeleri verilmiştir. $B \subseteq A$

olduğuna göre x in alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

A) 12 B) 15 C) 21 D) 23 E) 25

23. A kümesinin 8, B kümesinin 10 elemanı vardır.

Buna göre $A \cup B$ kümesinin eleman sayısı <u>en çok</u> kaçtır?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 16 E) 18

24. $A = \{x \mid x^2 < 10,\ x \in \mathbb{N}\}$
$B = \{x \mid 0 \le x < 4,\ x \in \mathbb{N}\}$
$C = \{0, 1, 2, 3\}$
$D = \{1, 2, 3, 4\}$
kümeleri veriliyor.
Buna göre aşağıdakilerden hangisi <u>yanlıştır</u>?

A) $A = B$ B) $A = C$ C) $B = C$
D) $B = D$ E) $A \ne D$

25. $A = \{4, 5, \{6\}, 7, \{7, 8\}\}$
$B = \{3, 4, \{5\}, \{7\}\}$

kümeleri veriliyor.
Buna göre $A \cup B$ kümesinin eleman sayısı kaçtır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

26. A ve B, E evrensel kümesinin iki alt kümesidir.
Buna göre $(A \cup B)' \cap A$ ifadesinin en sade şekli aşağıdakilerden hangisidir?

A) A B) B C) A' D) B' E) $\varnothing$

27-31. sorularda boş bırakılan yerlere uygun sözcük ya da değerleri yazınız.

27. $A = \{x \mid 4 \leq x^2 < 49,\ x \in \mathbb{N}\}$ kümesinin eleman sayısı .... bulunur.

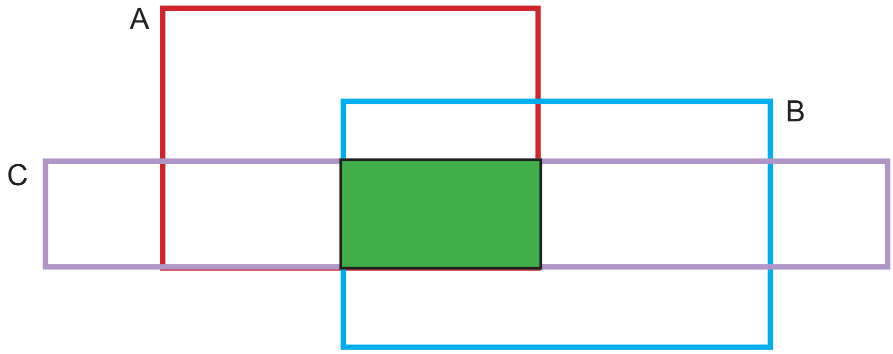
28. Elemanları sayılabilir çoklukta olan kümelere .... denir.

29. Ortak elemanı olmayan kümelere .... denir.

30. $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ kümesinin alt kümelerinin .... tanesinde a elemanı bulunur.

31. A ve B boş kümeden farklı ayrık olmayan kümelerdir. $s(A) = 8$ ve $s(B) = 12$ ise $s(A \cup B)$ kümesinin alabileceği en büyük değer .... , en küçük değer .... bulunur.

32.



Yukarıdaki Venn şeması ile verilen kümelerin elemanlarıyla ilgili aşağıdaki bilgiler veriliyor.

- A kümesinde binler basamağı 3 olan tam sayılar,
- B kümesinde çift doğal sayılar,
- C kümesinde rakamları toplamı tek sayı olan doğal sayılar vardır.

$D = \{1283, 3516, 3553, 3000, 3219, 5633, 3908\}$ kümesinin elemanlarının hangileri yeşil boyalı bölgenin elemanıdır?

DOĞAL SAYILARDA BÖLME BÖLÜNEBİLME

DOĞAL SAYILARDA BÖLME BÖLÜNEBİLME

3.1. BÖLÜNEBİLME KURALLARI

HAZIRLIK ÇALIŞMALARI

Özlem, her biri 36 sorudan oluşan 20 test çözmek istiyor. Özlem’in soru çözümünde uyguladığı adımlar sırasıyla şu şekildedir:

- Her testte ilk olarak 2 nin katı olan soruları çözüyor.
- Sonra başa dönerek 3 ün katı olan soruları çözüyor.
- Son olarak da 5 in katı olan soruları çözüyor.

Çözdüğü soruyu ikinci defa çözmüyor.

Özlem’in toplam kaç adet soru çözdüğünü nasıl hesaplayabiliriz ?

3.1.1. Doğal Sayılarda Bölünebilme Kuralları

A, B, C ve D birer doğal sayı ve B sıfırdan farklı bir sayı olmak üzere A sayısının B sayısına bölünmesiyle elde edilen bölüm C ve kalan D olsun.
Bu durumda bölme işlemi,

$$\begin{array}{r|l} A & B \\ \cline{2-2} & C \\ - & \\ \cline{1-1} D & \end{array}$$

A: Bölünen sayı,
B: Bölen sayı,
C: Bölüm,
D: Kalan sayıdır.

biçiminde gösterilir. Bir bölme işleminde

1. $A = B \cdot C + D$

2. $0 \leq D < B$

3. Kalan sıfır ise $D = 0$ dır. Bu durumda A sayısı B sayısına tam bölünür.

ÖRNEK

Bir doğal sayının 7 ile bölümünden bölüm 8 ve kalan 3 olduğuna göre bu doğal sayıyı bulunuz.

ÇÖZÜM

Bölünen doğal sayı A olsun. O hâlde

$$\begin{array}{r|l} A & 7 \\ \cline{2-2} & 8 \\ - & \\ \cline{1-1} 3 & \end{array}$$

biçimindedir. Bu durumda $A = 7 \cdot 8 + 3 = 56 + 3 = 59$ bulunur.

ÖRNEK

$$\begin{array}{r|l} A & 15 \\ \cline{2-2} - & a \\ \hline a+3 & \end{array}$$

Yanda verilen bölme işlemine göre A doğal sayısının alabileceği en büyük değeri bulunuz.

ÇÖZÜM

Bir bölme işleminde kalan sayı bölen sayıdan küçük olmalıdır.
O hâlde $a+3<15 \Rightarrow a<15-3 \Rightarrow a<12$ olmalıdır. A doğal sayısının en büyük değerini alabilmesi için a sayısı 12 den küçük en büyük doğal sayı olmalıdır. $a=11$ seçilirse bölüm 11 ve kalan sayı 14 olacaktır.

$$\begin{array}{r|l} A & 15 \\ \cline{2-2} - & 11 \\ \hline 14 & \end{array}$$

bölme işleminde

$$\begin{aligned} A &= 15 \cdot 11 + 14 \\ &= 165 + 14 \\ &= 179 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

2 ile Bölünebilme

Birler basamağında 0, 2, 4, 6 ve 8 çift rakamlarından biri olan doğal sayılar 2 ile bölünebilir.

ÖRNEK

Aşağıda verilen sayılardan hangilerinin 2 ile bölünebileceğini bulunuz.

a) 14 b) 27 c) 125 ç) 240 d) 1023 e) 1486

ÇÖZÜM

Verilen sayının 2 ile bölünebilmesi için birler basamağındaki rakam $A=\{0,2,4,6,8\}$ kümesinin bir elemanı olmalıdır.

a) 14 sayısının birler basamağında 4 rakamı bulunmaktadır. $4 \in A$ olduğundan 14, 2 ile bölünebilir.
b) 27 sayısının birler basamağında 7 rakamı bulunmaktadır. $7 \notin A$ olduğundan 27, 2 ile bölünemez.
c) 125 sayısının birler basamağında 5 rakamı bulunmaktadır. $5 \notin A$ olduğundan 125, 2 ile bölünemez.
ç) 240 sayısının birler basamağında 0 rakamı bulunmaktadır. $0 \in A$ olduğundan 240, 2 ile bölünebilir.
d) 1023 sayısının birler basamağında 3 rakamı bulunmaktadır. $3 \notin A$ olduğundan 1023, 2 ile bölünemez.
e) 1486 sayısının birler basamağında 6 rakamı bulunmaktadır. $6 \in A$ olduğundan 1486, 2 ile bölünebilir.

3 ile Bölünebilme

Rakamları toplamı 3 ün katı olan doğal sayılar 3 ile bölünebilir. Bir doğal sayının 3 ile bölümünden kalan, sayının rakamları toplamının 3 ile bölümünden kalan sayıya eşittir.

ÖRNEK

Aşağıda verilen sayılardan hangilerinin 3 ile bölünebileceğini bulunuz.

a) 15 b) 126 c) 145 ç) 218 d) 1283 e) 2401 f) 5241

ÇÖZÜM

a) 15 sayısının rakamları toplamı $1 + 5 = 6$ olur. 6 sayısı 3 ün katı olduğu için 15 sayısı 3 ile bölünebilir ve kalan 0 olur.

b) 126 sayısının rakamları toplamı $1 + 2 + 6 = 9$ olur. 9 sayısı 3 ün katı olduğu için 126 sayısı 3 ile bölünebilir ve kalan 0 olur.

c) 145 sayısının rakamları toplamı $1 + 4 + 5 = 10$ olur. 10 sayısı 3 ün katı olmadığından 145 sayısı 3 ile bölünemez. Bu durumda 145 sayısının rakamları toplamı olan 10 sayısı 3 ile bölünerek 1 kalanı elde edilir. 145 sayısının 3 ile bölümünden kalan 1 olur.

ç) 218 sayısının rakamları toplamı $2 + 1 + 8 = 11$ olur. 11 sayısı 3 ün katı olmadığından 218 sayısı 3 ile bölünemez. 11 sayısının rakamları toplamı $1 + 1 = 2$ bulunur. 218 sayısının 3 ile bölümünden kalan 2 olur.

d) 1283 sayısının rakamları toplamı $1 + 2 + 8 + 3 = 14$ olur. 14 sayısı 3 ün katı olmadığından 1283 sayısı 3 ile bölünemez. 14 sayısının rakamları toplamı $1 + 4 = 5$ bulunur. 5 in 3 ile bölümünden kalan 2 olduğundan 1283 sayısının 3 ile bölümünden kalan 2 olur.

e) 2401 sayısının rakamları toplamı $2 + 4 + 0 + 1 = 7$ olur. 7 sayısı 3 ün katı olmadığından 2401 sayısı 3 ile bölünemez. 7 sayısının 3 ile bölümünden kalan 1 olduğundan 2401 sayısının 3 ile bölümünden kalan 1 olur.

f) 5241 sayısının rakamları toplamı $5 + 2 + 4 + 1 = 12$ olur. 12 sayısı 3 ün katı olduğu için 5241 sayısı 3 ile bölünebilir ve kalan 0 olur.

ÖRNEK

Rakamları birbirinden farklı beş basamaklı $8760a$ doğal sayısı 3 ile bölünebildiğine göre a nın alabileceği değerler toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$8760a$ doğal sayısı 3 ile bölünebildiğine göre bu sayının rakamları toplamı 3 ün katı olmalıdır.
$8 + 7 + 6 + 0 + a = 21 + a$ sayısı 3 ün katı olmalıdır. O hâlde $8760a$ sayısı,
$a = 0$ için $21 + a = 21 + 0 = 21$ olup 3 ün 7 katı
$a = 3$ için $21 + a = 21 + 3 = 24$ olup 3 ün 8 katı
$a = 6$ için $21 + a = 21 + 6 = 27$ olup 3 ün 9 katı
$a = 9$ için $21 + a = 21 + 9 = 30$ olup 3 ün 10 katı
olacağından 3 ile bölünebilir. Fakat $8760a$ sayısının rakamları birbirinden farklı olacağı için a sayısı 0 ve 6 rakamlarını alamaz. Bu durumda a nın alabileceği değerler toplamı $3 + 9 = 12$ bulunur.

4 ile Bölünebilme

Bir doğal sayının son iki basamağını oluşturan sayı 4 ün katı ise bu doğal sayı 4 ile bölünebilir. Bir doğal sayının 4 ile bölümünden kalan, son iki basamağının 4 ile bölümünden kalan sayıya eşittir.

ÖRNEK

Aşağıda verilen sayıların 4 ile bölümünden kalanlarını bulunuz.

a) 16 b) 18 c) 27 ç) 146 d) 284 e) 1 234

ÇÖZÜM

a) 16 sayısı 4 ün katı olduğundan 4 ile bölünebilir.
Bu durumda 16 nın 4 ile bölümünden kalan 0 olur.

b) 18 sayısı 4 ün katı olmadığından 4 ile bölünemez.

$$\begin{array}{r|l} 18 & 4 \\ \cline{2-2} -16 & 4 \\ \hline 2 & \end{array}$$

Bu durumda 18 in 4 ile bölümünden kalan 2 olur.

c) 27 sayısı 4 ün katı olmadığından 4 ile bölünemez.

$$\begin{array}{r|l} 27 & 4 \\ \cline{2-2} -24 & 6 \\ \hline 3 & \end{array}$$

Bu durumda 27 nin 4 ile bölümünden kalan 3 olur.

ç) 146 sayısı 3 basamaklı bir doğal sayıdır. Bu sayının son iki basamağı 46 dır. 46 sayısı 4 ün katı olmadığından 146 sayısı 4 ile bölünemez.

$$\begin{array}{r|l} 46 & 4 \\ \cline{2-2} -44 & 11 \\ \hline 2 & \end{array}$$

Bu durumda 146 nın 4 ile bölümünden kalan 2 olur.

d) 284 sayısının son iki basamağı 84 tür. 84 sayısı 4 ün katı olduğundan 4 ile bölünebilir.
Bu durumda 284 ün 4 ile bölümünden kalan 0 olur.

e) 1234 sayısı 4 basamaklı bir doğal sayıdır. Bu sayının son iki basamağı 34 tür. 34 sayısı 4 ün katı olmadığından 1234 sayısı 4 ile bölünemez.

$$\begin{array}{r|l} 34 & 4 \\ \cline{2-2} -32 & 8 \\ \hline 2 & \end{array}$$

Bu durumda 1234 ün 4 ile bölümünden kalan 2 olur.

ÖRNEK

Dört basamaklı 132a sayısının 4 ile bölümünden kalan 1 olduğuna göre a nın alabileceği değerler toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

Dört basamaklı 132a sayısının son iki basamağı 2a dır. 2a sayısı 4 ile bölünebilseydi 4 ün katı olan 20, 24 ve 28 sayılarından birisi olurdu. Fakat 4 ile bölümünden kalan 1 olduğu için her bir sayıya 1 ilave edilir. 2a sayısı $20 + 1 = 21$, $24 + 1 = 25$ ve $28 + 1 = 29$ sayılarından biri olur. O hâlde a sayısı 1, 5 veya 9 rakamlarından birisi olacaktır. Bu durumda a nın alabileceği değerler toplamı $1 + 5 + 9 = 15$ bulunur.

5 ile Bölünebilme

Birler basamağında 0 veya 5 rakamı olan doğal sayılar 5 ile bölünebilmektedir. Bir doğal sayının 5 ile bölümünden kalan, bu doğal sayının birler basamağındaki rakamının 5 ile bölümünden kalan sayıya eşit olur.

ÖRNEK

Aşağıda verilen sayıların 5 ile bölümünden kalanlarını bulunuz.

a) 10 b) 153 c) 1545 ç) 2580 d) 76 541 e) 98 762 f) 123 458 g) 128 349

ÇÖZÜM

a) 10 sayısının birler basamağı 0 olduğu için 10 sayısı 5 ile tam bölünür.
Bu durumda kalan 0 olur.

b) 153 sayısının birler basamağı 3 tür. Birler basamağı 0 veya 5 olmadığı için bu sayı 5 ile tam bölünmez. Birler basamağındaki rakam 3 olduğu için 153 sayısının 5 ile bölümünden kalan 3 olur.

c) 1545 sayısının birler basamağı 5 olduğu için 1545 sayısı 5 ile tam bölünür.
Bu durumda kalan 0 olur.

ç) 2580 sayısının birler basamağı 0 olduğu için 2580 sayısı 5 ile tam bölünür.
Bu durumda kalan 0 olur.

d) 76 541 sayısının birler basamağı 1 dir. Birler basamağı 0 veya 5 olmadığı için bu sayı 5 ile tam bölünmez.
Bu durumda 76 541 sayısının 5 ile bölümünden kalan 1 olur.

e) 98 762 sayısının birler basamağı 2 dir. Birler basamağı 0 veya 5 olmadığı için bu sayı 5 ile tam bölünmez. Birler basamağındaki rakam 2 olduğu için 98 762 sayısının 5 ile bölümünden kalan 2 olur.

f) 123 458 sayısının birler basamağı 8 dir. Birler basamağı 0 veya 5 olmadığından bu sayı 5 ile tam bölünmez. Birler basamağındaki 8 in 5 e bölümünden kalan 3 olduğu için 123 458 sayısının 5 ile bölümünden kalan 3 olur.

g) 128 349 sayısının birler basamağı 9 dur. Birler basamağı 0 veya 5 olmadığından bu sayı 5 ile tam bölünmez. Birler basamağındaki 9 un 5 e bölümünden kalan 4 olduğu için 128 349 sayısının 5 ile bölümünden kalan 4 olur.

ÖRNEK

Dört basamaklı 98ab doğal sayısı 4 ve 5 ile bölünebilmektedir. Buna göre a nın alabileceği değerler toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

98ab sayısı 5 ile bölünebildiğinden b sayısı 0 veya 5 olmalıdır. Bu sayı aynı zamanda 4 ile de bölünebildiğinden bir çift sayı olmalıdır. O hâlde b sayısı 0 olacağından 98ab sayısı 98a0 olur. Bu sayının son iki basamağı 4 ün katı olması gerektiğinden son iki basamak 20, 40, 60 veya 80 sayılarından birisidir. Bu durumda a nın alabileceği değerler toplamı $2 + 4 + 6 + 8 = 20$ bulunur.

9 ile Bölünebilme

Rakamları toplamı 9 un katı olan sayılar 9 ile bölünebilir. Bir doğal sayının 9 ile bölümünden kalan, sayının rakamları toplamının 9 ile bölümünden kalan sayıya eşittir.

ÖRNEK

Aşağıda verilen sayıların 9 ile bölümünden kalanlarını bulunuz.

a) 27 b) 495 c) 1234 ç) 8765 d) 76 545 e) 10 008 f) 8000 g) 15 631

ÇÖZÜM

a) 27 sayısının rakamları toplamı $2 + 7 = 9$ olur. 9 sayısı 9 un katı olduğundan 27 sayısı 9 ile bölünebilir. Bu durumda kalan 0 bulunur.
b) 495 sayısının rakamları toplamı $4 + 9 + 5 = 18$ olur. 18 sayısı 9 un katı olduğundan 495 sayısı 9 ile bölünebilir. Bu durumda kalan 0 bulunur.
c) 1234 sayısının rakamları toplamı $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ olur. 1234 sayısının 9 ile bölümünden kalan, 10 sayısının rakamları toplamı olan $1 + 0 = 1$ sayısına eşit bulunur.
ç) 8765 sayısının rakamları toplamı $8 + 7 + 6 + 5 = 26$ olur. 8765 sayısının 9 ile bölümünden kalan, 26 sayısının rakamları toplamı olan $2 + 6 = 8$ sayısına eşit bulunur.
d) 76 545 sayısının rakamları toplamı $7 + 6 + 5 + 4 + 5 = 27$ olur. 27 sayısı 9 un katı olduğundan bu sayı 9 ile bölünebilir. Bu durumda kalan 0 bulunur.
e) 10 008 sayısının rakamları toplamı $1 + 0 + 0 + 0 + 8 = 9$ olur. 9 sayısı 9 un katı olduğundan bu sayı 9 ile bölünebilir. Bu durumda kalan 0 bulunur.
f) 8000 sayısının rakamları toplamı $8 + 0 + 0 + 0 = 8$ olur. 8 sayısı 9 un katı olmadığından bu sayı 9 ile bölünemez. 8 sayısı 9 sayısından küçük olduğu için kalan 8 bulunur.
g) 15 631 sayısının rakamları toplamı $1 + 5 + 6 + 3 + 1 = 16$ olur. 15 631 sayısının 9 ile bölümünden kalan, 16 sayısının rakamları toplamı olan $1 + 6 = 7$ sayısına eşit bulunur.

ÖRNEK

Yirmi basamaklı 666...6 doğal sayısının 9 ile bölümünden kalanını bulunuz.

ÇÖZÜM

666 ... 6 yirmi basamaklı doğal sayısının rakamları toplamı $\underbrace{6 + 6 + 6 + ... + 6}_{20 \text{ tane}} = 20 \cdot 6 = 120$ olur.

Bu durumda 120 sayısının 9 ile bölümünden kalan $1 + 2 + 0 = 3$ bulunur.

10 ile Bölünebilme

Birler basamağında 0 rakamı bulunan doğal sayılar 10 ile bölünebilir. Bir doğal sayının 10 ile bölümünden kalan, sayının birler basamağındaki rakamdır.

ÖRNEK

Aşağıda verilen sayıların 10 ile bölümünden kalanlarını bulunuz.

a) 20 b) 99 c) 108 ç) 10 005 d) 400 850 e) 1000 001 f) 999 997

ÇÖZÜM

a) 20 sayısının birler basamağında 0 rakamı olduğu için bu sayı 10 ile bölünebilir. Bu durumda kalan 0 olur.
b) 99 sayısının birler basamağında 9 rakamı olduğu için bu sayının 10 ile bölümünden kalan 9 olur.
c) 108 sayısının birler basamağında 8 rakamı olduğu için bu sayının 10 ile bölümünden kalan 8 olur.
ç) 10 005 sayısının birler basamağında 5 rakamı olduğu için bu sayının 10 ile bölümünden kalan 5 olur.
d) 400 850 sayısının birler basamağında 0 rakamı olduğu için bu sayı 10 ile bölünebilir. Bu durumda kalan 0 olur.
e) 1000 001 sayısının birler basamağında 1 rakamı olduğu için bu sayının 10 ile bölümünden kalan 1 olur.
f) 999 997 sayısının birler basamağında 7 rakamı olduğu için bu sayının 10 ile bölümünden kalan 7 olur.

ÖRNEK

2ab üç basamaklı doğal sayısı 10 ile bölünebilmektedir. Bu sayının 9 ile bölümünden kalan 3 olduğuna göre $a + b$ kaçtır?

ÇÖZÜM

2ab sayısı 10 ile bölünebildiğine göre b sayısı 0 olmalıdır. 2a0 sayısının 9 ile bölümünden kalan 3 olduğundan bu sayının rakamları toplamının 9 ile bölümünden kalan 3 tür. O hâlde $2 + a + 0 = 2 + a$ dır. Kalanın 3 olabilmesi için rakamları toplamı 3 olmalıdır. Buna göre $a = 1$ olur. Bu durumda $a + b = 1 + 0 = 1$ bulunur.

Asal ve Aralarında Asal Sayılar

Sadece kendisine ve 1 e bölünebilen 1 den büyük doğal sayılara **asal sayılar** denir. 2, 3, 5, 7, 11, 13, … sayıları birer asal sayıdır. 2 den başka çift asal sayı yoktur.

ÖRNEK

Aşağıda verilen sayılardan hangilerinin asal sayı olduğunu bulunuz.

a) 1 b) 2 c) 5 ç) 9 d) 15 e) 19

ÇÖZÜM

a) Asal sayılar 1 den büyük olmalıdır. Bu nedenle 1 asal sayı değildir.
b) 2 sayısı sadece 1 ve 2 sayılarına bölünebildiği için asal sayıdır.
c) 5 sayısı sadece 1 ve 5 sayılarına bölünebildiği için asal sayıdır.
ç) 9 sayısı 1 ve 9 un dışında 3 sayısına da bölünebildiği için asal sayı değildir.
d) 15 sayısı 1 ve 15 in dışında 3 ve 5 sayılarına da bölünebildiği için asal sayı değildir.
e) 19 sayısı sadece 1 ve 19 sayılarına bölünebildiği için asal sayıdır.

1 den başka pozitif ortak böleni olmayan iki veya daha fazla pozitif tam sayılara **aralarında asal sayılar** denir. Her pozitif tam sayı 1 ile aralarında asaldır.

ÖRNEK

Aşağıda verilen sayılardan aralarında asal sayı olanları bulunuz.

a) 2 ve 3 b) 3 ve 9 c) 4 ve 12 ç) 5 ve 14 d) 3, 4 ve 5 e) 2, 4 ve 6 f) 3, 6 ve 7

ÇÖZÜM

a) 2 ve 3 sayılarının 1 dışında hiçbir pozitif ortak böleni olmadığı için 2 ve 3 aralarında asal sayılardır.
b) 3 ve 9 sayılarının 1 dışında 3 sayısı da ortak böleni olduğu için 3 ve 9 aralarında asal sayılar değildir.
c) 4 ve 12 sayılarının 1 dışında 2 ve 4 sayıları da ortak böleni olduğu için 4 ve 12 aralarında asal sayılar değildir.
ç) 5 ve 14 sayılarının 1 dışında hiçbir pozitif ortak böleni olmadığı için 5 ve 14 aralarında asal sayılardır.
d) 3, 4 ve 5 sayılarının 1 dışında hiçbir pozitif ortak böleni olmadığı için 3, 4 ve 5 aralarında asal saylardır.
e) 2, 4 ve 6 sayılarının 1 dışında 2 sayısı da ortak böleni olduğu için 2, 4 ve 6 sayıları aralarında asal sayılar değildir.
f) 3, 6 ve 7 sayılarının 1 dışında hiçbir pozitif ortak böleni olmadığı için 3, 6 ve 7 aralarında asal sayılardır.

UYARI

a ve b aralarında asal sayılar olmak üzere a ve b sayılarına bölünebilen bir doğal sayı $a \cdot b$ çarpımına da bölünebilir.

2 ve 3 e bölünebilen bir doğal sayı $2 \cdot 3 = 6$ sayısına da bölünebilir.
3 ve 4 e bölünebilen bir doğal sayı $3 \cdot 4 = 12$ sayısına da bölünebilir.
3 ve 5 e bölünebilen bir doğal sayı $3 \cdot 5 = 15$ sayısına da bölünebilir.

ÖRNEK

1416 sayısının 6 ya tam bölünüp bölünmediğini inceleyiniz.

ÇÖZÜM

1416 sayısının 6 ile tam bölünmesi için 6 nın asal çarpanları olan 2 ve 3 e tam bölünmelidir. 1416 sayısındaki birler basamağı 6 olduğundan sayı 2 ile tam bölünür. 1416 sayısının rakamları toplamı $1 + 4 + 1 + 6 = 12$ olup 3 ün katıdır ve 3 ile tam bölünür. Bu durumda 1416 sayısı 2 ve 3 ile tam bölündüğünden 6 ile de tam bölünür.

ÖRNEK

Beş basamaklı 1230a doğal sayısı 6 ile bölünebildiğine göre a nın alabileceği değerleri bulunuz.

ÇÖZÜM

1230a doğal sayısı 6 ile bölünebildiğine göre bu sayı 2 ve 3 ile bölünebilir. 2 ile bölünebildiğinden a sayısı çift bir rakam olur. 3 ile bölünebildiğinden bu sayının rakamları toplamı 3 ün katı olur. $1 + 2 + 3 + 0 + a = 6 + a$ nın 3 ün katı olması için a rakamı 0, 3, 6 veya 9 olmalıdır. Ayrıca 2 ye bölündüğü için çift olmalıdır.
Bu durumda a rakamı 0 veya 6 değerlerini alabilir.

ÖRNEK

Dört basamaklı 7a2b doğal sayısı 12 ile bölünebildiğine göre a ve b rakamlarının alabileceği değerleri bulunuz.

ÇÖZÜM

7a2b doğal sayısı 12 ile bölünebildiğine göre bu sayı 3 ve 4 ile bölünebilir. 4 ile bölünebildiğinden sayının son iki basamağı olan 2b sayısı 4 ün katı olmalıdır. O hâlde 2b sayısı 20, 24 veya 28 olabilir. Bu sayı 3 e de bölünebildiğine göre bu sayının rakamları toplamı 3 ün katı olmalıdır. Buna göre 7a20 için $7 + a + 2 + 0 = 9 + a$ nın 3 ün katı olması için a rakamı 0, 3, 6 veya 9 değerlerini alabilir. 7a24 için $7 + a + 2 + 4 = 13 + a$ nın 3 ün katı olması için a rakamı 2, 5 veya 8 değerlerini alabilir. 7a28 için $7 + a + 2 + 8 = 17 + a$ nın 3 ün katı olması için a rakamı 1, 4 veya 7 değerlerini alabilir.

Bu durumda

$b = 0$ olduğunda a rakamı 0, 3, 6 veya 9
$b = 4$ olduğunda a rakamı 2, 5 veya 8
$b = 8$ olduğunda a rakamı 1, 4 veya 7 değerlerini alabilir.

ÖRNEK

Rakamları farklı dört basamaklı $4x5y$ sayısının 12 ile bölümünden kalan 2 dir. Buna göre x sayısının kaç farklı değer alabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

12 sayısı $3 \cdot 4$ şeklinde aralarında asal çarpanlarına ayrılabildiğinden $4x5y$ sayısının 3 ve 4 ile bölümünden kalan 2 olur.

Önce 4 ile bölünebilme kuralına bakılır. Sayının son iki basamağı 4 ün katından 2 fazla olmalıdır. Buradan y nin alabileceği değerler 4 veya 8 olabilir. Fakat dört basamaklı sayının rakamları farklı olacağından $y = 4$ olamaz.

$y = 8$ için dört basamaklı sayı $4x58$ olur. Bu sayının 3 ile bölümünden kalan 2 olması için $4 + x + 5 + 8 = 17 + x$ olup $17 + x = 3k + 2$ $(k \in \mathbb{Z})$ şeklinde bir sayı olması gerekir. Dolayısıyla x sayısı 3, 6 veya 9 olabilir.

Sonuç olarak x sayısı 3, 6, 9 olmak üzere 3 farklı değer alır.

ÖRNEK

Üç basamaklı 8ab doğal sayısı 15 ile bölünebildiğine göre $a+b$ nın alabileceği <u>en büyük</u> değeri bulunuz.

ÇÖZÜM

8ab doğal sayısı 15 ile bölünebildiğine göre bu sayı 3 ve 5 e bölünebilir. Sayının 5 ile bölünebilmesi için birler basamağı 0 veya 5 olmalıdır. Sayının 3 ile bölünebilmesi için ise rakamları toplamının 3 ün katı olması gerekir. Bu durumda $b = 0$ için 8a0 sayısının rakamları toplamı olan $8 + a + 0 = 8 + a$ nın 3 ün katı olabilmesi için a rakamı 1, 4 veya 7 değerlerini alabilir. Burada $a + b$, $1 + 0 = 1$, $4 + 0 = 4$ veya $7 + 0 = 7$ olmak üzere 3 farklı değer alabilir. $b = 5$ için 8a5 sayısının rakamları toplamı olan $8 + a + 5 = 13 + a$ nın 3 ün katı olabilmesi için a rakamı 2, 5 veya 8 değerlerini alabilir. Burada $a + b$, $2 + 5 = 7$, $5 + 5 = 10$ veya $8 + 5 = 13$ olmak üzere 3 farklı değer alabilir.
Bu durumda $a + b$ nın alabileceği en büyük değer 13 olur.

ÖRNEK

Dört basamaklı $8A3B$ sayısının 15 ile bölümünden kalan 9 dur. Buna göre A sayısının kaç farklı değer alabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

15 sayısı $3 \cdot 5$ şeklinde aralarında asal çarpanlarına ayrılabilen bir sayıdır. $8A3B$ sayısının 15 ile bölümünden kalan 9 ise 5 ile bölümünden kalan 4 tür (9 un 5 ile bölümünden kalan 4 tür). O hâlde son basamak 4 veya 9 olabilir.
$8A3B$ sayısı 15 ile bölümünden kalan 9 ise 3 ile bölümünden kalan 0 dır (9 un 3 ile bölümünden kalan 0 dır). Buradan
$B = 4$ için dört basamaklı sayı $8A34$ olur. Bu sayının 3 ile bölümünden kalan 0 olması için
$8 + A + 3 + 4 = 3k \ (k \in \mathbb{Z})$ olup $A = 0, 3, 6, 9$ olabilir.
$B = 9$ için dört basamaklı sayı $8A39$ olur. Bu sayının 3 ile bölümünden kalan 0 olması için
$8 + A + 3 + 9 = 3k \ (k \in \mathbb{Z})$ olup $A = 1, 4, 7$ olabilir.
Sonuç olarak A sayısı $0, 1, 3, 4, 6, 7, 9$ olmak üzere 7 farklı değer alır.

3.2. EBOB VE EKOK

3.2.1. Doğal Sayılarda EBOB ve EKOK

Asal Çarpanlarına Ayırma

Sıfırdan farklı bir doğal sayı birden fazla asal sayının çarpımı şeklinde yazılabilir. Bu asal sayıların her birine o doğal sayının **asal çarpanı** denir.
x, y ve z sıfırdan farklı birer doğal sayı ve a, b ve c birbirinden farklı asal sayılar olsun. Sıfırdan farklı bir A doğal sayısının $A = a^x \cdot b^y \cdot c^z$ şeklinde yazılmasına A doğal sayısının **asal çarpanlara ayrılmış biçimi** denir.

ÖRNEK

36 ve 96 doğal sayılarının asal çarpanlarına ayrılmış hâlini bulunuz.

ÇÖZÜM

36 ve 96 sayıları asal çarpanlarına ayrılırken ardışık asal sayılara bölünür.

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \rightarrow 36 \div 2 = 18 \\ 18 & 2 \rightarrow 18 \div 2 = 9 \\ 9 & 3 \rightarrow 9 \div 3 = 3 \\ 3 & 3 \rightarrow 3 \div 3 = 1 \\ 1 & \end{array}$$

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$\begin{array}{r|l} 96 & 2 \rightarrow 96 \div 2 = 48 \\ 48 & 2 \rightarrow 48 \div 2 = 24 \\ 24 & 2 \rightarrow 24 \div 2 = 12 \\ 12 & 2 \rightarrow 12 \div 2 = 6 \\ 6 & 2 \rightarrow 6 \div 2 = 3 \\ 3 & 3 \rightarrow 3 \div 3 = 1 \\ 1 & \end{array}$$

$$96 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^5 \cdot 3$$

Bu durumda 36 sayısının asal çarpanlarına ayrılmış biçimi $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$ ve 96 sayısının asal çarpanlarına ayrılmış biçimi $96 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^5 \cdot 3$ olur.
Burada 2 ve 3 sayıları 36 ve 96 sayılarının asal çarpanlarıdır.

Doğal Sayılarda En Büyük Ortak Bölen (EBOB)

En az biri sıfırdan farklı iki veya daha fazla tam sayının pozitif ortak bölenlerinin en büyüğüne **en büyük ortak bölen (EBOB)** denir. a ve b sayılarının en büyük ortak böleni **EBOB(a,b)** biçiminde gösterilir.

ÖRNEK

8 ve 12 sayılarının en büyük ortak bölenini bulunuz.

ÇÖZÜM

8 in pozitif tam sayı bölenleri; 1, 2, 4 ve 8 dir. 12 nin pozitif tam sayı bölenleri; 1, 2, 3, 4, 6 ve 12 dir. 8 ve 12 nin ortak bölenleri 1, 2 ve 4 tür. Bu ortak bölenlerin en büyüğü 4 olduğu için 8 ve 12 sayılarının EBOB u 4 tür. Bu durumda $\text{EBOB}(8,12) = 4$ bulunur.

ÖRNEK

24 ve 40 sayılarının en büyük ortak bölenini bulunuz.

ÇÖZÜM

24	40	2
12	20	2
6	10	2
3	5	3
1	5	5
	1	

Daire içine alınan sayılar 24 ve 40 sayılarını ortak bölen sayılardır. 3 sayısı, 5 in böleni olmadığı için 5 sayısı bir alt basamakta yeniden yazılır. Daire içine alınan sayıların çarpımı 24 ve 40 sayılarının EBOB u olur.

Bu durumda $\text{EBOB}(24,40) = 2\cdot 2\cdot 2 = 2^3 = 8$ bulunur.

ÖRNEK

120, 140 ve 160 sayılarının EBOB unu bulunuz.

ÇÖZÜM

120	140	160	2
60	70	80	2
30	35	40	2
15	35	20	2
15	35	10	2
15	35	5	3
5	35	5	5
1	7	1	7
	1		

Burada 2 sayısı 15 ve 35 in böleni olmadığı için 15 ve 35 sayısı bir alt basamağa tekrar yazılmıştır. Daire içine alınan sayılar 120, 140 ve 160 sayılarının ortak bölenidir. Daire içine alınan sayıların çarpımı 120, 140 ve 160 sayılarının EBOB u olur.

Bu durumda $\text{EBOB}(120,140,160) = 2\cdot 2\cdot 5 = 2^2\cdot 5 = 20$ bulunur.

ÖRNEK

Boyutları 240 m ve 72 m olan dikdörtgen biçimindeki bir bahçe kare biçiminde eş parsellere ayrılacaktır.

Buna göre bu bahçenin <u>en az</u> kaç parsele ayrılabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

72	240	2
36	120	2
18	60	2
9	30	2
9	15	3
3	5	3
1	5	5
	1	

En az sayıda parsele ayırmak için eş karelerin bir kenarının uzunluğu mümkün olduğunca büyük olmalıdır. Bir kenara ait uzunluğun en fazla olabilmesi için 240 ve 72 sayılarının EBOB u bulunur.

$\text{EBOB}(72, 240) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3 = 24$ olur. Eş kare şeklindeki parsellerin bir kenarının uzunluğu en fazla 24 m olur.

$$\text{Parsel Sayısı} = \frac{\text{Dikdörtgenin Alanı}}{\text{Bir karenin Alanı}} = \frac{\overset{10}{\cancel{240}} \cdot \overset{3}{\cancel{72}}}{\underset{1}{\cancel{24}} \cdot \underset{1}{\cancel{24}}} = \frac{10 \cdot 3}{1 \cdot 1} = 30 \text{ bulunur.}$$

Bu durumda bahçe en az 30 parsele ayrılabilir.

ÖRNEK

Bir meslek lisesinin Kimya Teknolojileri bölümü öğrencileri; 20 kg limon, 25 kg zambak ve 30 kg zeytin kolonyası üretimi yapmışlardır. Bu üç çeşit kolonya, eşit hacimli bidonlara hiç artmayacak ve birbirleriyle karıştırılmayacak biçimde doldurulacaktır.

Buna göre <u>en az</u> kaç adet bidona ihtiyaç duyulacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

En az sayıda bidon kullanmak için bidonun hacminin mümkün olduğunca büyük olması gerekir. Bunun için 20, 25 ve 30 sayılarının EBOB u bulunur.

20	25	30	2
10	25	15	2
5	25	15	3
5	25	5	5
1	5	1	5
	1		

$\text{EBOB}(20, 25, 30) = 5$ olur.

20 kg limon kolonyası için $\frac{20}{5} = 4$ adet bidon,

25 kg zambak kolonyası için $\frac{25}{5} = 5$ adet bidon,

30 kg zeytin kolonyası için $\frac{30}{5} = 6$ adet bidon kullanılır.

Bu durumda toplam $4 + 5 + 6 = 15$ adet bidona ihtiyaç vardır.

ÖRNEK

Bir belediye, boyutları 30 m ve 50 m olan dikdörtgen biçiminde bir park alanı yapmıştır. Bu park alanını aydınlatmak için alanın köşelerine de konmak koşuluyla çevresine eşit aralıklarla aydınlatma lambaları yerleştirilecektir.

Buna göre <u>en az</u> kaç adet lambanın kullanılacağını bulunuz.

Görsel 3.1

ÇÖZÜM

En az sayıda lamba kullanmak için iki lamba arasındaki uzaklığın mümkün olduğunca fazla olması gerekir. Bunun için iki lamba arasındaki uzaklık, 30 ve 50 sayılarının EBOB u olmalıdır.

$$\begin{array}{rr|l} 30 & 50 & 2 \\ 15 & 25 & 3 \\ 5 & 25 & 5 \\ 1 & 5 & 5 \\ & 1 & \end{array}$$

$\text{EBOB}(30, 50) = 2 \cdot 5 = 10$ olur.

$$\text{Lamba sayısı} = \frac{\text{Parkın çevresi}}{\text{İki lamba arası uzaklık}} = \frac{2 \cdot (30 + 50)}{10} = \frac{160}{10} = 16 \text{ olur.}$$

Bu durumda en az 16 adet lamba kullanılır.

ÖRNEK

Uzunlukları sırasıyla 1440 cm ve 900 cm olan iki demir profil, demir kesme makinesi ile hiç artmayacak şekilde eşit ve <u>en büyük</u> uzunluktaki parçalara ayrılacaktır. Kesme makinesi bir kesme işlemini 15 saniyede tamamladığına göre tüm kesim için harcanan toplam sürenin kaç saniye olduğunu bulunuz.

Görsel 3.2

ÇÖZÜM

Profillerin eşit uzunlukta en büyük parçalara ayrılabilmesi için 1440 ve 900 sayılarının EBOB u bulunmalıdır.

$$\begin{array}{rr|l} 1440 & 900 & 2 \\ 720 & 450 & 2 \\ 360 & 225 & 2 \\ 180 & 225 & 2 \\ 90 & 225 & 2 \\ 45 & 225 & 3 \\ 15 & 75 & 3 \\ 5 & 25 & 5 \\ 1 & 5 & 5 \\ & 1 & \end{array}$$

O hâlde $\text{EBOB}(1440, 900) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$ olur.

1440 cm lik profil $\frac{1440}{180} = 8$ ve 900 cm lik profil $\frac{900}{180} = 5$ parçaya ayrılmalıdır. 1440 cm lik profilin 8 parçaya bölünmesi için 7 kesim ve 900 cm lik profilin 5 parçaya bölünmesi için 4 kesim yapılmalıdır. Toplam $7 + 4 = 11$ kesim yapılacaktır. Bu durumda 11 kesim işlemi toplam $11 \cdot 15 = 165$ saniyede tamamlanır.

Doğal Sayılarda En Küçük Ortak Kat (EKOK)

En az biri sıfırdan farklı iki ya da daha fazla doğal sayının ortak katlarının en küçüğüne, **en küçük ortak kat (EKOK)** denir. a ve b sayılarının en küçük ortak katı **EKOK (a,b)** şeklinde gösterilir.

ÖRNEK

8 ve 12 sayılarının en küçük ortak katını bulunuz.

ÇÖZÜM

8 in katları: 8, 16, 24, 32, 40, 48, ...
12 nin katları: 12, 24, 36, 48, 60, 72, ...
olduğundan 8 ve 12 nin ortak katları 24, 48, … biçimindeki 24 ün katları olan sayılardır.
Bu katların en küçüğü 24 olduğundan 8 ve 12 sayılarının EKOK u 24 tür. Bu durumda $\text{EKOK}(8,12) = 24$ bulunur.

ÖRNEK

15 ve 20 sayılarının en küçük ortak katını ve en büyük ortak bölenini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{array}{cc|c} 15 & 20 & 2 \\ 15 & 10 & 2 \\ 15 & 5 & 3 \\ 5 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & \end{array}$$

Daire içine alınan 5 sayısı, 15 ve 20 sayılarının ortak bölenidir. Bu durumda $\text{EBOB}(15,20) = 5$ olur.
2 ve 3 sayıları ise ortak olmayan bölenlerdir. Bu sayıların tamamının çarpımı 15 ve 20 sayılarının EKOK udur. Bu durumda $\text{EKOK}(15,20) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ bulunur.

ÖRNEK

72, 108 ve 144 sayılarının EBOB ve EKOK unu bulunuz.

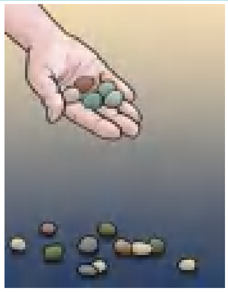
ÇÖZÜM

$$\begin{array}{ccc|c} 72 & 108 & 144 & 2 \\ 36 & 54 & 72 & 2 \\ 18 & 27 & 36 & 2 \\ 9 & 27 & 18 & 2 \\ 9 & 27 & 9 & 3 \\ 3 & 9 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ & 1 & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{EBOB}(72,108,144) &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \\ &= 2^2 \cdot 3^2 \\ &= 4 \cdot 9 \\ &= 36 \text{ olur.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{EKOK}(72,108,144) &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \\ &= 2^4 \cdot 3^3 \\ &= 16 \cdot 27 = 432 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK



Görsel 3.3

Levent, oyun oynamak için taşlarını beşer beşer ve yedişer yedişer sayıyor. Taşları her saydığında 4 taşının arttığını görüyor. Buna göre Levent'in oyun oynamak için <u>en az</u> kaç taşı olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Levent'in taşlarının sayısı 5 e ve 7 ye bölündüğünde 4 kalanını veren en küçük doğal sayı olmalıdır. O hâlde Levent'in taşlarının sayısı 5 ve 7 sayılarının EKOK unun 4 fazlasıdır.

$$\begin{array}{cc|c} 5 & 7 & 5 \\ 1 & 7 & 7 \\ & 1 & \end{array}$$

EKOK$(5,7) = 35$ olur. Bu durumda Levent'in en az $35 + 4 = 39$ tane taşı vardır.

ÖRNEK

Ahmet Bey, tabanı kare olan banyosunun fayanslarını yenilemek istemektedir. Bunun için boyutları 24 cm ve 30 cm olan dikdörtgen şeklindeki fayanslar kullanmıştır. Ahmet Bey'in <u>en az</u> kaç adet fayans kullanmış olabileceğini bulunuz.

Görsel 3.4

ÇÖZÜM

24 ve 30 sayılarının EKOK u kare şeklindeki tabanın bir kenarının uzunluğunu verir.

$$\begin{array}{cc|c} 24 & 30 & 2 \\ 12 & 15 & 2 \\ 6 & 15 & 2 \\ 3 & 15 & 3 \\ 1 & 5 & 5 \\ & 1 & \end{array}$$

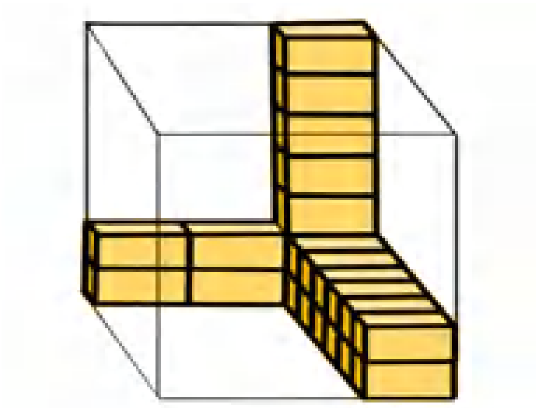
EKOK$(24,30) = 2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot5 = 2^3\cdot3\cdot5 = 120$ olur. O hâlde tabanı kare olan banyonun bir kenarının uzunluğu en az 120 cm dir.

$$\text{Kullanılan fayans sayısı} = \frac{\text{Banyonun tabanının alanı}}{\text{Bir tane fayansın alanı}} = \frac{\overset{5}{\cancel{120}}\cdot\overset{4}{\cancel{120}}}{\underset{1}{\cancel{24}}\cdot\underset{1}{\cancel{30}}} = \frac{5\cdot4}{1\cdot1} = 20 \text{ bulunur.}$$

Bu durumda Ahmet Bey, en az 20 adet fayans kullanmış olabilir.

ÖRNEK

Murat'ın elinde boyutları 12 cm, 15 cm ve 18 cm olan dikdörtgenler prizması şeklinde ahşaptan yapılmış oyuncak tuğlalar vardır. Murat, bunları kullanarak içi dolu bir küp yapmak istemektedir. Buna göre Murat'ın <u>en az</u> kaç tane oyuncak tuğlaya ihtiyaç duyacağını bulunuz.



Görsel 3.5

ÇÖZÜM

12, 15 ve 18 sayılarının EKOK u küpün bir ayrıtının uzunluğunu verir.

12	15	18	2
6	15	9	2
3	15	9	3
1	5	3	3
	5	1	5
	1		

$\text{EKOK}(12,15,18) = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5 = 2^2\cdot 3^2\cdot 5 = 180$ olur.
O hâlde küpün bir ayrıtının uzunluğu en az 180 cm dir.

$$\text{Kullanılan oyuncak tuğla sayısı} = \frac{\text{Küpün hacmi}}{\text{Bir tane tuğlanın hacmi}}$$

$$= \frac{\overset{15}{\cancel{180}}\cdot \overset{12}{\cancel{180}}\cdot \overset{10}{\cancel{180}}}{\underset{1}{\cancel{12}}\cdot \underset{1}{\cancel{15}}\cdot \underset{1}{\cancel{18}}}$$

$$= \frac{15\cdot 12\cdot 10}{1\cdot 1\cdot 1} = 1800 \text{ olur.}$$

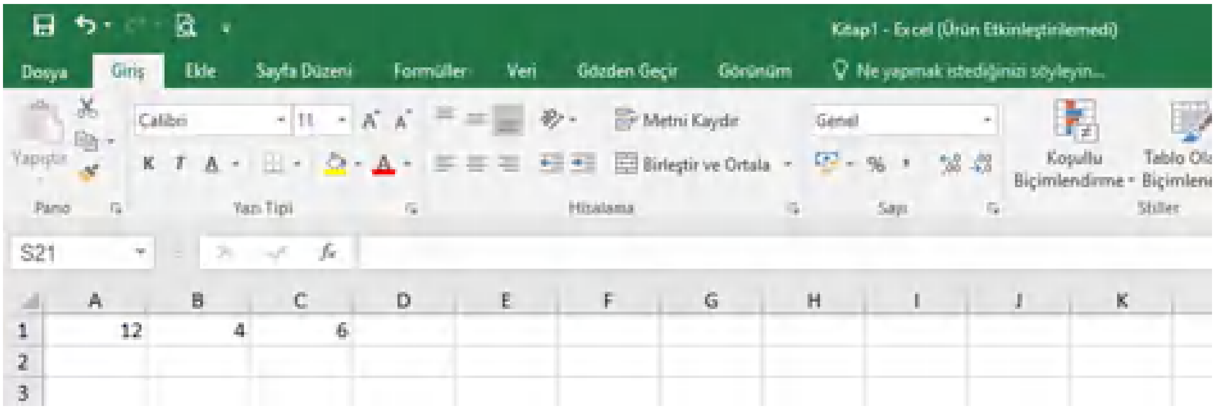
Bu durumda Murat, en az 1800 adet oyuncak tuğlaya ihtiyaç duyar.

ÖRNEK

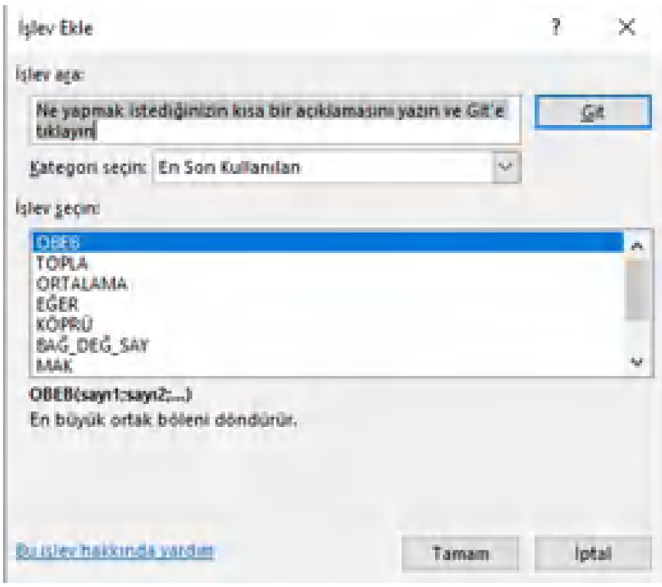
Boyutları 12 cm, 6 cm ve 4 cm olan dikdörtgenler prizması biçiminde bir kütük hiç artmayacak şekilde eş küp parçalara ayrılmak isteniyor. Buna göre <u>en az</u> kaç tane küp olacağını Excel programı yardımıyla bulunuz.

ÇÖZÜM

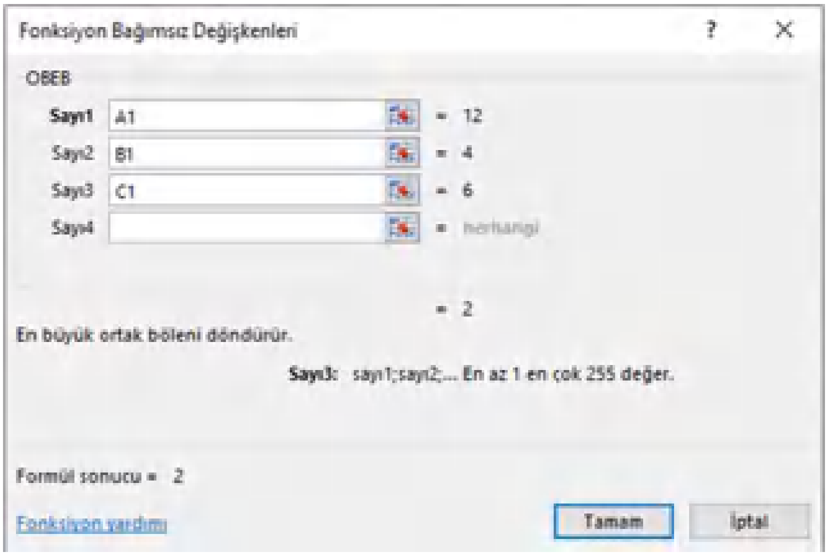
En az sayıdaki küp sayısını bulmak için verilen boyut uzunluklarının EBOB u bulunmalıdır. Bilgisayardaki Excel programını açıp 12, 6 ve 4 sayılarını aşağıdaki gibi tabloya yazınız.



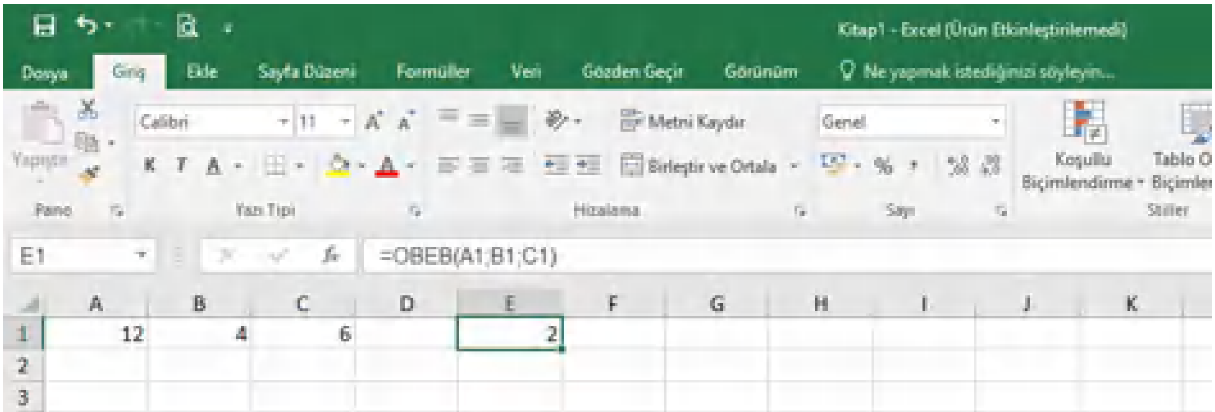
E1 hücresine tıkladıktan sonra  tuşuna tıklayınız. Aşağıdaki gibi açılan pencerede "OBEB" sekmesini seçerek "Tamam" butonuna tıklayınız.



Açılan pencerede Sayı1 yerine A1, Sayı2 yerine B1 ve Sayı3 yerine C1 yazarak "Tamam" butonuna tıklayınız.



E1 hücresinde, verilen sayıların EBOB unun 2 olduğu görülür.



Buradan küp sayısı, $\dfrac{\text{Kütüğün hacmi}}{\text{Bir tane küpün hacmi}} = \dfrac{12 \cdot 4 \cdot 6}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \dfrac{288}{8} = 36$ bulunur.

Benzer işlemleri yaparak EKOK u da bulunuz.

ALIŞTIRMALAR

1. Bir doğal sayının 16 ile bölümünden elde edilen bölüm 12 ve kalan 5 olduğuna göre bu doğal sayıyı bulunuz.

2. Yanda verilen bölme işlemine göre A doğal sayısının alabileceği <u>en büyük</u> ve <u>en küçük</u> değerleri bulunuz.

$$\begin{array}{r|l} A & 13 \\ \cline{2-2} & a+4 \\ - & \\ \cline{1-1} a-1 & \end{array}$$

3. Rakamları birbirinden farklı beş basamaklı $4023a$ doğal sayısı 2 ile bölünebildiğine göre a nın alabileceği değerler çarpımını bulunuz.

4. 24 basamaklı 225225…225 doğal sayısının 3 ile bölümünden kalanı bulunuz.

5. Dört basamaklı a23b doğal sayısının 5 ile bölümünden elde edilen kalan 2 olduğuna göre b nin alabileceği değerler toplamını bulunuz.

6. Beş basamaklı $5432a$ doğal sayısının 4 ile bölümünden kalan 3 olduğuna göre a nın alabileceği değerler toplamını bulunuz.

7. Rakamları birbirinden farklı beş basamaklı $3415a$ doğal sayısı 6 ile bölünebildiğine göre a nın alabileceği değerler toplamını bulunuz.

8. Altı basamaklı $80632a$ doğal sayısı 12 ile bölünebildiğine göre a değerini bulunuz.

9. Aşağıda verilen doğal sayıların EKOK ve EBOB unu bulunuz.

a) 15 ve 24

b) 72 ve 120

c) 18, 48 ve 144

ç) 36, 96 ve 186

10. Boyutları 4 m ve 6 m olan dikdörtgen biçimindeki bir odanın tabanına kare şeklinde eş fayanslar döşenecektir.

Buna göre <u>en az</u> kaç adet fayans kullanılabileceğini bulunuz.

11. Veli, oyuncaklarını beşerli ve altışarlı saydığında her defasında 3 oyuncak artıyor.

Buna göre Veli’nin <u>en az</u> kaç tane oyuncağı olduğunu bulunuz.

12. Ayrıtları 8 cm, 12 cm ve 15 cm olan dikdörtgenler prizması şeklindeki tuğlalar yan yana ve üst üste konularak küp şeklinde bir yapı inşa edilecektir.

Buna göre bu yapıyı inşa etmek için <u>en az</u> kaç tuğla kullanılacağını bulunuz.

1. ABC üç basamaklı doğal sayısı 2 ile bölünebildiğine göre C nin alabileceği değerler toplamı kaçtır?

A) 20 B) 18 C) 16 D) 14 E) 10

2. AAA üç basamaklı doğal sayısı 3 ile bölünebildiğine göre en büyük AAA üç basamaklı sayısı, en küçük AAA üç basamaklı sayısından kaç fazladır?

A) 555 B) 666 C) 777 D) 888 E) 999

3. 43 2AB beş basamaklı doğal sayısı 4 ile bölünebilmekte fakat 3 ile bölünememektedir.

Buna göre $A + B$ nın alabileceği en küçük değer kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

4. ABAB dört basamaklı doğal sayısı 5 ile bölünebildiğine göre $A + B$ nın alabileceği en büyük değer kaçtır?

A) 5 B) 7 C) 14 D) 15 E) 18

5. AA3A dört basamaklı doğal sayısı 9 ile bölünebildiğine göre A nın alabileceği değerler toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 11 B) 12 C)13 D) 14 E) 15

6. 3AB üç basamaklı doğal sayısı 10 ile bölünebilmektedir. Bu sayının 9 ile bölümünden kalan 4 olduğuna göre A nın alabileceği değer aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

7. Aşağıdaki hangi seçenekte verilen sayılar aralarında asal değildir?

A) 2 ve 5 B) 8 ve 27 C) 16 ve 39 D) 3, 27 ve 81 E) 5, 25 ve 38

8. 660 sayısı asal çarpanlarına ayrıldığında $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 11^d$ sayısı elde ediliyor. Buna göre $a + b + c + d$ kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

9. 42A5 dört basamaklı doğal sayısının 6 ile bölümünden kalan 5 olduğuna göre A yerine kaç farklı rakam gelir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

10 4A3B dört basamaklı doğal sayısı 12 ile bölünebildiğine göre A yerine kaç farklı rakam yazılabilir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

11. Boyutları 12 cm, 18 cm ve 24 cm olan dikdörtgenler prizması şeklindeki tuğlalar kullanılarak içi dolu bir küp yapılacaktır. Buna göre en az kaç adet tuğla kullanılır?

A) 30 B) 36 C) 48 D) 60 E) 72

12. Fatma Hanım'ın elinde boyutları birer cm olan küp şeklinde kesme şekerler vardır. Fatma Hanım, bu şekerleri bir araya getirerek büyük bir küp şeker yapmak istiyor.

Buna göre Fatma Hanım'ın en az kaç tane küp şekere ihtiyacı vardır?

A) 3 B) 4 C) 8 D) 12 E) 16

13. a, c, e birbirinden farklı asal sayılar olmak üzere 20, 45, 75 sayılarının en küçük ortak katı $a^b \cdot c^d \cdot e^f$ biçimindedir.

Buna göre $a + b + c + d + e + f$ kaçtır?

A) 12 B) 16 C) 18 D) 20 E) 24

14. 24, 36 ve 60 sayılarının EKOK u aşağıdakilerden hangisidir?

A) 90 B) 120 C) 180 D) 360 E) 480

15. Park ve Bahçeler Müdürlüğü, boyutları 30 metre ve 42 metre olan dikdörtgen şeklindeki bir millet bahçesinin köşelerine de gelecek şekilde kenarlarına eşit aralıklarla ağaçlar dikecektir.

Buna göre en az kaç ağaç dikilebilir?

A) 20 B) 22 C) 24 D) 26 E) 28

16. EKOK u 200 olan iki sayının toplamının alabileceği en büyük değer kaçtır?

A) 100 B) 200 C) 300 D) 350 E) 400

17. Birbirinden farklı üç doğal sayının EKOK u 90 dır.

Buna göre bu sayıların toplamının alabileceği en büyük değer kaçtır?

A) 155 B) 160 C) 165 D) 170 E) 175

18. EBOB u 6 olan iki doğal sayının toplamının alabileceği en küçük değer kaçtır?

A) 12 B) 16 C) 18 D) 20 E) 24

19. 144 litre limonata ve 96 litre meyve suyu hiç artmayacak ve birbirine karışmayacak şekilde eş hacimdeki şişelere doldurulacaktır.

Buna göre kullanılacak şişe sayısı en az kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

20. 12, 54 ve 63 sayılarının EBOB u aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3 B) 9 C) 12 D) 14 E) 18

21. EBOB u 6 olan üç farklı doğal sayının toplamının alabileceği en küçük değer kaçtır?

A) 20 B) 28 C) 32 D) 36 E) 40

22-26. sorularda boş bırakılan yerlere uygun sözcük ya da değerleri yazınız.

22. A doğal sayısının 12 ye bölümünden elde edilen bölüm 5 ve kalan 3 ise A doğal sayısı .... olur.

23. Bir A doğal sayısı, 0 dan farklı bir B doğal sayısına bölündüğünde kalan sıfır ise A sayısı B sayısına .... denir.

24. 1 den başka ortak pozitif tam sayı böleni olmayan iki ya da daha fazla sayılara .... sayılar denir.

25. 12 ile tam bölünen üç basamaklı rakamları birbirinden farklı en büyük doğal sayı .... olur.

26. 120 ile 144 sayılarının en büyük ortak böleni .... olur.

27. Emeklilerin T.C. kimlik numaralarının son dört basamağına göre ayın kaçıncı günü maaş alacakları aşağıda gibi belirlenmiştir.

* 4 e bölünenler ayın 20 sinde,
* 15 e bölünenler ayın 25 inde.

Ahmet Bey	1824
Ayşe Hanım	5730
Mustafa Bey	2180
Hatice Hanım	6108
Fatma Hanım	7410

Yukarıda isimleri ve T.C. kimlik numaralarının son dört basamakları verilen kişilerin ayın kaçıncı günleri maaşlarını alacaklarını bulunuz.

DENKLEMLER

DENKLEMLER

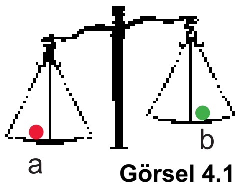
4.1. BİRİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

4.1. BİRİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

HAZIRLIK ÇALIŞMALARI

Cisimlerin ağırlık veya kütlelerini ölçmeye yarayan aletlere **eşit kollu terazi** denir. Ağırlıkları farklı üç bilye eşit kollu terazinin farklı kefelerine yerleştirildiğinde aşağıdaki durumlar ortaya çıkmış olur.

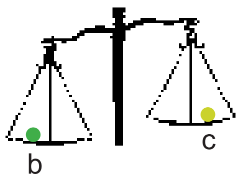
I. durum



Görsel 4.1

I. durumda kefelerden birine a, diğerine b bilyesi konulduğunda a bilyesinin bulunduğu kefenin b bilyesinin bulunduğu kefeden daha aşağıda olduğu görülüyor.

II. durum



Görsel 4.2

II. durumda kefelerden birine b, diğerine c bilyesi konulduğunda b bilyesinin bulunduğu kefenin c bilyesinin bulunduğu kefeden daha aşağıda olduğu görülüyor.

1. Bilyeler ağırlıklarına göre küçükten büyüğe sıralanabilir mi ?
2. Herhangi iki bilyenin ağırlıkları toplamı hangi bilyenin ağırlığına eşit olabilir ?

4.1.1. Gerçek Sayılar Kümesinde Aralık Kavramı

Sayı doğrusu üzerinde bulunan iki nokta arasındaki noktalara karşılık gelen bütün gerçek sayılardan oluşan alt kümeye **aralık**, bu iki noktaya ise aralığın **uç noktaları** denir.

a ve b sayı doğrusu üzerindeki iki gerçek sayı olmak üzere bu iki sayı arasındaki tüm gerçek sayıların bulunduğu ve uç noktaların dâhil edilmediği aralığa **açık aralık** denir ve (a, b) biçiminde gösterilir.

(a, b) açık aralığı sayı doğrusunda aşağıdaki gibi gösterilir.

$(a, b) = \{x \mid a < x < b,\ x \in \mathbb{R}\}$ olur.

ÖRNEK

$(-2,3)$ nı sayı doğrusu üzerinde gösterip küme olarak ifade ediniz.

ÇÖZÜM

$(-2,3)=\{x \mid -2<x<3,\ x\in\mathbb{R}\}$

a ve b, sayı doğrusu üzerindeki iki gerçek sayı olmak üzere bu iki sayı arasındaki tüm gerçek sayıların ve uç noktalardan yalnız birinin bulunduğu aralığa **yarı açık aralık** denir ve $(a,b]$ veya $[a,b)$ biçimleri ile gösterilir.

$(a,b]$ ve $[a,b)$ yarı açık aralıkları sayı doğrusunda aşağıdaki gibi gösterilir.

$(a,b]=\{x \mid a<x\le b,\ x\in\mathbb{R}\}$

$[a,b)=\{x \mid a\le x<b,\ x\in\mathbb{R}\}$ olur.

ÖRNEK

$(-4,6]$ ve $[-1,3)$ nı sayı doğrusu üzerinde gösterip küme olarak ifade ediniz.

ÇÖZÜM

$(-4,6]=\{x \mid -4<x\le 6,\ x\in\mathbb{R}\}$

$[-1,3)=\{x \mid -1\le x<3,\ x\in\mathbb{R}\}$

a ve b, sayı doğrusu üzerindeki iki gerçek sayı olmak üzere bu iki sayı arasındaki tüm gerçek sayıların ve uç noktaların bulunduğu aralığa **kapalı aralık** denir. Kapalı aralık $[a,b]$ biçiminde gösterilir.

$[a,b]$ kapalı aralığı sayı doğrusunda aşağıdaki gibi gösterilir.

$[a,b]=\{x \mid a\le x\le b,\ x\in\mathbb{R}\}$ olur.

ÖRNEK

$[-3,2]$ nı sayı doğrusu üzerinde gösterip küme olarak ifade ediniz.

ÇÖZÜM

$[-3,2]=\{x \mid -3 \le x \le 2,\ x \in \mathbb{R}\}$

NOT

$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$(a,\infty)=\{x \mid x > a,\ x \in \mathbb{R}\}$

$[a,\infty)=\{x \mid x \ge a,\ x \in \mathbb{R}\}$

$(-\infty,a)=\{x \mid x < a,\ x \in \mathbb{R}\}$

$(-\infty,a]=\{x \mid x \le a,\ x \in \mathbb{R}\}$

ÖRNEK

Aşağıdaki sayı doğrularında gösterilen aralıkları ve kümeleri bulunuz.

a) 

b) 

c) 

ç) 

ÇÖZÜM

a) 

$(-4,8)=\{x \mid -4 < x < 8,\ x \in \mathbb{R}\}$

b) 

$[0,6)=\{x \mid 0 \le x < 6,\ x \in \mathbb{R}\}$

c) 

$[-10,-1]=\{x \mid -10 \le x \le -1,\ x \in \mathbb{R}\}$

ç) 

$[-3,\infty)=\{x \mid -3 \le x,\ x \in \mathbb{R}\}$

4.1.2. Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

İçerisinde en az bir tane değişken bulunduran iki niceliğin birbirine eşitliğini ifade eden bağıntılara **denklem** adı verilir. $5x-6=0$, $x^2-2x=5$, $3m-2n=12$ ifadeleri birer denklem belirtir. Denklemdeki x, m ve n gibi ifadelere **bilinmeyen** veya **değişken**, bilinmeyenin en büyük kuvvetine de **denklemin derecesi** denir.

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax+b=0$ biçimindeki eşitliklere **x değişkenine bağlı birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem** denir. Denklemdeki a ve b gerçek sayılarına **denklemin katsayıları** denir. $ax+b=0$ denklemini sağlayan x değişkeninin değerine **denklemin kökü** ve denklemin kökünden oluşan kümeye **denklemin çözüm kümesi** denir. Denklemin çözüm kümesi $\text{Ç}=\left\{-\frac{b}{a}\right\}$ biçiminde gösterilir.

$ax+b=0$ denklemindeki terimlerde x değişkeninin en büyük üssü 1 olduğu için denklem, birinci dereceden bir denklemdir. $6x+8=0$, $3x-2=0$, $\frac{1}{2}x-\sqrt{3}=0$, $\sqrt{5}x-1=0$ denklemleri birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerdir.

ÖRNEK

$(a-4)x^2+ax-4=0$ denklemi x değişkenine bağlı birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olduğuna göre a ve x değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$(a-4)x^2+ax-4=0$ denkleminin birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olması için x^2 li terimin olmaması gerekir. O hâlde $a-4=0$ ve buradan $a=4$ olur. Bu sayı denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}(4-4)x^2+4x-4=0 &\Rightarrow 4x-4=0\\ &\Rightarrow 4x=4\\ &\Rightarrow \frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}}=\frac{4}{4}\\ &\Rightarrow x=1 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

ÖRNEK

$3x-9=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}3x-9=0 &\Rightarrow 3x=9\\ &\Rightarrow \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}}=\frac{9}{3}\\ &\Rightarrow x=3\\ &\Rightarrow \text{Ç}=\{3\} \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

ÖRNEK

$4(2x+1)-3x=2x+10$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$4(2x+1)-3x=2x+10$$
$$8x+4-3x=2x+10$$
$$8x-3x-2x=10-4$$
$$3x=6$$
$$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}}=\frac{6}{3}$$
$x=2 \Rightarrow$ Ç $=\{2\}$ bulunur.

$ax+b=0$ denkleminde

- $a\neq 0$ ise denklemin çözüm kümesi bir elemanlıdır.
  $ax+b=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$ olduğundan Ç $=\left\{-\frac{b}{a}\right\}$ olur.
- $a=0$ ve $b\neq 0$ ise Ç $=\varnothing$ yani denklemin çözüm kümesinin elemanı yoktur.
- $a=0$ ve $b=0$ ise Ç $=\mathbb{R}$ yani denklemin çözüm kümesi sonsuz elemanlıdır.

ÖRNEK

$10x-7=10x-13$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$10x-7=10x-13$$
$$10x-10x=-13+7$$
$0\neq -6$ olduğundan Ç $=\varnothing$ bulunur.

ÖRNEK

$(a-6)x+10=0$ denkleminin çözüm kümesi boş küme olduğuna göre a değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Denklemin çözüm kümesi boş küme olduğundan x in katsayısı sıfır olmalıdır. O hâlde $a-6=0$ ve buradan $a=6$ bulunur.

ÖRNEK

$(n-7)x+m+1=0$ denkleminin çözüm kümesi tüm gerçek sayılar olduğuna göre $n-m$ kaçtır?

ÇÖZÜM

Denklemin çözüm kümesi tüm gerçek sayılar $(Ç=\mathbb{R})$ olduğundan x in katsayısı ve sabit terim sıfır olmalıdır. O hâlde $\underbrace{(n-7)}_{0}x+\underbrace{m+1}_{0}=0$ denkleminde $n-7=0$ ve $m+1=0$ olur. Buradan

$n=7$ ve $m=-1$ elde edilir. Bu durumda $n-m=7-(-1)=7+1=8$ bulunur.

ÖRNEK

$\frac{3x-1}{4-x}=-1\frac{1}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{3x-1}{4-x}=-1\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{3x-1}{4-x}=-\frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow 2\cdot(3x-1)=-3\cdot(4-x)$$
$$\Rightarrow 6x-2=-12+3x$$
$$\Rightarrow 6x-3x=-12+2$$
$$\Rightarrow 3x=-10$$
$$\Rightarrow \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}}=-\frac{10}{3}$$
$$\Rightarrow x=-\frac{10}{3} \text{ olur.}$$

Bu durumda çözüm kümesi $Ç=\left\{-\frac{10}{3}\right\}$ bulunur.

ÖRNEK

$4x+2(x-6)=6x-12$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$4x+2(x-6)=6x-12\Rightarrow 4x+2x-12=6x-12$$
$$\Rightarrow 6x-12=6x-12$$
$$\Rightarrow 6x-6x=12-12$$
$$\Rightarrow 0=0 \text{ olur.}$$

Bu durumda denklem tüm x gerçek sayıları için sağlanacağından $Ç=\mathbb{R}$ bulunur.

ÖRNEK

$3x + a - 4 = 0$ denkleminin kökü 6 olduğuna göre a değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Denklemin kökü 6 olduğundan $x = 6$ bu denklemi sağlar.

$$3x + a - 4 = 0 \Rightarrow 3 \cdot 6 + a - 4 = 0$$
$$\Rightarrow 18 + a - 4 = 0$$
$$\Rightarrow 14 + a = 0$$
$$\Rightarrow a = -14 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

Bir sayının 5 katının 10 eksiği, aynı sayının 4 katının 12 fazlasına eşit olduğuna göre bu sayıyı bulunuz.

ÇÖZÜM

İstenilen sayı x olsun. O hâlde

$5x - 10 = 4x + 12$ olur. Buradan

$$5x - 10 = 4x + 12 \Rightarrow 5x - 4x = 12 + 10$$
$$\Rightarrow x = 22 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

48 lirası bulunan İpek günde 4 lira, 36 lirası bulunan Azra günde 6 lira biriktirmektedir. Kaç gün sonra paralarının eşit olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

İpek ve Azra'nın paraları x gün sonra eşit olsun. O hâlde

$$48 + 4x = 36 + 6x$$
$$48 - 36 = 6x - 4x$$
$$12 = 2x$$
$$\frac{12}{2} = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}$$
$$x = 6 \text{ gün bulunur.}$$

ÖRNEK

Bir lokantada yemek yiyen 12 kişi hesabı eşit paylaşacaklardır. Aniden işi çıkan 4 kişi hesabı ödemeden lokantadan ayrılınca, diğerlerinin her biri 25 lira fazla ödemek zorunda kalmıştır. Buna göre toplam hesabın kaç lira olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Bir kişinin ödeyeceği para x lira olsun. Bu durumda 12 kişi toplam $12x$ lira ödemelidir. Aniden 4 kişinin işi çıkıp hesap ödemeden ayrılınca geriye kalan 8 kişi, her biri $(x+25)$ lira ödeyeceğinden toplam $8(x+25)$ lira ödemelidir. Her iki durumda toplam ödenecek para eşit olacağından,

$$\begin{aligned} 12x = 8(x+25) &\Rightarrow 12x = 8x + 200 \\ &\Rightarrow 12x - 8x = 200 \\ &\Rightarrow 4x = 200 \\ &\Rightarrow x = 50 \text{ lira olur.} \end{aligned}$$

Toplam ödenecek hesap $12x = 12 \cdot 50 = 600$ lira bulunur.

ÖRNEK

25 soruluk bir sınavda doğru cevaplar 4 puan kazandırırken yanlış cevaplar 2 puan kaybettirmektedir. Buna göre 2 soruyu boş bırakan Ahmet, 80 puan aldığına göre Ahmet'in kaç soruyu doğru cevapladığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Ahmet, 2 soru boş bıraktığına göre 23 soru cevaplamıştır. Bu 23 sorudan x tanesini doğru cevaplamış olsun. Bu durumda $23 - x$ tanesini yanlış cevaplamış olur. Her doğru cevap için 4 puan kazanılırken her yanlış cevap için 2 puan kaybedileceğinden

$$\begin{aligned} 4x - 2(23 - x) = 80 &\Rightarrow 4x - 46 + 2x = 80 \\ &\Rightarrow 6x = 80 + 46 \\ &\Rightarrow 6x = 126 \\ &\Rightarrow x = 21 \text{ soru doğru cevaplamış olur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK

Ceyda, bir masanın boyunu karış ile ölçmek istemektedir. Masanın bir ucundan diğer ucuna doğru 8 karış ölçtüğünde 10 cm eksik kalıyor. 9 karış ölçtüğünde ise masanın boyunu 8 cm geçiyor. Buna göre masanın boyunun kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Ceyda'nın bir karışının uzunluğu x cm olsun. Masanın boyunun uzunluğu $8x + 10$ veya $9x - 8$ olacağından

$$\begin{aligned} 8x + 10 = 9x - 8 &\Rightarrow 10 + 8 = 9x - 8x \\ &\Rightarrow x = 18 \text{ cm olur.} \end{aligned}$$

$x = 18$ olduğundan masanın boyu

$$\begin{aligned} 8x + 10 &= 8 \cdot 18 + 10 \\ &= 144 + 10 = 154 \text{ cm olur.} \end{aligned}$$

4.1.3. Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklemler

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a, b \neq 0$ olmak üzere $ax + by + c = 0$ biçimindeki eşitliklere **x ve y değişkenine bağlı birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem** denir.

$ax + by + c = 0$ denkleminin kökleri (x, y) sıralı ikililerinden oluşur. Bu sıralı ikililerin oluşturduğu kümeye denklemin çözüm kümesi denir.

$x + y = 1,\ 2x + 4y = 3$ denklemleri birinci dereceden iki bilinmeyenli denklemlerdir.

$ax + by = m,\ \ cx + dy = n$ şeklinde verilen aynı değişkenden oluşan ve birden fazla denklem bulunduran ifadelere **birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi** denir. Her iki denklemi de sağlayan (x, y) sıralı ikililerin kümesine denklem sisteminin çözüm kümesi denir.

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 3 \\ 3x + y = 1 \end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{r} x + 3y = 4 \\ 2x + 4y = 5 \end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l} 6x + 7y = 3 \\ 3x + y = -2 \end{array}\right\}$$

denklemleri birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemleridir. Denklem sisteminin çözüm kümesi farklı yöntemler ile bulunabilmektedir.

Bu yöntemler

- Yerine koyma yöntemi
- Yok etme yöntemidir.

Yerine Koyma Yöntemi

Verilen iki denklemden herhangi birinde bilinmeyenlerden biri, diğeri türünden yazılır. Bulunan ifade diğer denklemde yerine yazılır.

ÖRNEK

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 8 \\ x - y = 2 \end{array}\right\}$$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x - y = 2 \Rightarrow y = x - 2$ olur. Bu eşitlik $x + y = 8$ denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} x + (x - 2) = 8 &\Rightarrow 2x - 2 = 8 \\ &\Rightarrow 2x = 8 + 2 \\ &\Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \frac{10}{2} \Rightarrow x = 5 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Verilen denklemlerden herhangi birinde x yerine 5 yazılırsa

$x + y = 8 \ \Rightarrow\ 5 + y = 8 \ \Rightarrow\ y = 3$ olur.

Bu durumda denklem sisteminin çözüm kümesi $Ç = \{(5, 3)\}$ bulunur.

ÖRNEK

$\left.\begin{array}{l} 3x - y = 6 \\ 5x + 2y = 10 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$3x - y = 6 \Rightarrow y = 3x - 6$ olur. Bu eşitlik $5x + 2y = 10$ denkleminde yerine yazılırsa

$$5x + 2(3x - 6) = 10 \Rightarrow 5x + 6x - 12 = 10$$
$$\Rightarrow 11x = 10 + 12$$
$$\Rightarrow 11x = 22$$
$$\Rightarrow \frac{\cancel{11}x}{\cancel{11}} = \frac{22}{11}$$
$$\Rightarrow x = 2 \text{ olur.}$$

Verilen denklemlerden herhangi birinde x yerine 2 yazılır.

$$5x + 2y = 10 \Rightarrow 5 \cdot 2 + 2y = 10$$
$$\Rightarrow 10 + 2y = 10$$
$$\Rightarrow 2y = 10 - 10$$
$$\Rightarrow 2y = 0$$
$$\Rightarrow y = 0 \text{ olur.}$$

Bu durumda denklem sisteminin çözüm kümesi $Ç = \{(2, 0)\}$ bulunur.

Yok Etme Yöntemi

Verilen iki denklemde bilinmeyenlerin bir tanesinin katsayıları eşit ve zıt işaretli olacak şekilde düzenlenir. Daha sonra denklemler taraf tarafa toplanır. Bilinmeyenlerden bir tanesi yok edilir ve diğer bilinmeyen bulunur. Bulunan değer herhangi bir denklemde yerine yazılarak diğer bilinmeyen değer elde edilir.

ÖRNEK

$\left.\begin{array}{l} x + y = 12 \\ x - y = 2 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{array}{rl} & x + y = 12 \\ + & x - y = 2 \\ \hline & 2x = 14 \end{array}$$
$$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \frac{14}{2}$$
$$x = 7 \text{ olur.}$$

Her iki denklemde y bilinmeyenlerinin katsayıları zıt işaretli olduğu için denklemler taraf tarafa toplanıp x bilinmeyeni bulunur.

Bulunan x değeri $x + y = 12$ denkleminde yerine yazılırsa
$7 + y = 12 \Rightarrow y = 12 - 7 = 5$ olur.
Bu durumda denklemin çözüm kümesi $Ç = \{(7, 5)\}$ bulunur.

ÖRNEK

$\left.\begin{array}{l} 3x + y = 10 \\ 2x - y = 5 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Her iki denklemde y bilinmeyenlerinin katsayıları zıt işaretli olduğu için denklemler taraf tarafa toplanıp x bilinmeyeni bulunur.

$$\begin{array}{rl} & 3x + y = 10 \\ + & 2x - y = 5 \\ \hline & 5x = 15 \end{array}$$

$$\frac{\cancel{5}x}{\cancel{5}} = \frac{15}{5}$$

$x = 3$ olur.

Bulunan x değeri $3x + y = 10$ denkleminde yerine yazılırsa

$3 \cdot 3 + y = 10 \Rightarrow 9 + y = 10$

$\Rightarrow y = 10 - 9 = 1$ olur.

Bu durumda denklem sisteminin çözüm kümesi $Ç = \{(3,1)\}$ bulunur.

ÖRNEK

$\left.\begin{array}{l} 4x + y = 16 \\ 3x + 2y = 12 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Her iki denklemde x ve y bilinmeyenlerinin katsayıları birbirinden farklıdır. Bu nedenle değişkenlerden herhangi birisinin katsayısı zıt işaretli yapılmalıdır. Bunun için birinci denklemin katsayıları -2 ile çarpılırsa y değişkenleri zıt işaretli olacaktır. Daha sonra denklemler taraf tarafa toplanıp x bilinmeyeni bulunur.

$$\begin{array}{rl} -2/ & 4x + y = 16 \\ & 3x + 2y = 12 \\ \hline & -8x - 2y = -32 \\ + & 3x + 2y = 12 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{\cancel{-}5x}{\cancel{-}5} = \frac{-20}{-5}$$

$x = 4$ olur.

Bulunan x değeri $4x + y = 16$ denkleminde yerine yazılırsa

$4 \cdot 4 + y = 16 \Rightarrow 16 + y = 16$

$\Rightarrow y = 16 - 16 = 0$ olur.

Bu durumda denklem sisteminin çözüm kümesi $Ç = \{(4,0)\}$ bulunur.

ÖRNEK

$\left.\begin{array}{l}4x+3y=16\\3x+2y=12\end{array}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Her iki denklemde x ve y bilinmeyenlerinin katsayıları birbirinden farklıdır. Bu nedenle değişkenlerden herhangi birisinin katsayısı zıt işaretli yapılmalıdır. Bunun için birinci denklemin katsayıları -2 ile ikinci denklemin katsayısı ise 3 ile çarpılırsa y değişkenleri zıt işaretli olacaktır. Daha sonra denklemler taraf tarafa toplanıp x bilinmeyeni bulunur.

$$\begin{array}{rl}
-2/ & 4x+3y=16\\
3/ & 3x+2y=12\\
\hline
 & -8x-\cancel{6y}=-32\\
+ & 9x+\cancel{6y}=36\\
\hline
 & x=4 \text{ olur.}
\end{array}$$

Bulunan x değeri $4x+3y=16$ denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}4\cdot4+3y=16 &\Rightarrow 16+3y=16\\ &\Rightarrow 3y=16-16\\ &\Rightarrow y=0 \text{ olur.}\end{aligned}$$

Bu durumda denklem sisteminin çözüm kümesi $Ç=\{(4,0)\}$ bulunur.

ÖRNEK

$\left.\begin{array}{l}5x+2y=14\\4x+3y=-7\end{array}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Her iki denklemdeki y değişkenlerinin zıt işaretli olabilmesi için birinci denklem -3, ikinci denklem ise 2 ile çarpılmalıdır. Daha sonra denklemler taraf tarafa toplanıp x bilinmeyeni bulunur.

$$\begin{array}{rl}
-3/ & 5x+2y=14\\
2/ & 4x+3y=-7\\
\hline
 & -15x-\cancel{6y}=-42\\
+ & 8x+\cancel{6y}=-14\\
\hline
 & -7x=-56\\
 & \dfrac{\cancel{-7}x}{\cancel{-7}}=\dfrac{-56}{-7}\\
 & x=8 \text{ olur.}
\end{array}$$

Bulunan x değeri $5x+2y=14$ denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}5\cdot8+2y=14 &\Rightarrow 40+2y=14\\ &\Rightarrow 2y=14-40\\ &\Rightarrow 2y=-26\\ &\Rightarrow \frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}}=\frac{-26}{2}\\ &\Rightarrow y=-13 \text{ olur.}\end{aligned}$$

Bu durumda denklem sisteminin çözüm kümesi $Ç=\{(8,-13)\}$ bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıda verilen aralıkları küme olarak ifade ediniz.

a) $(-4, 4)$
b) $[-2, 3)$
c) $(-1, 5]$
ç) $[-6, 2]$

2. Aşağıdaki sayı doğrularında kırmızı ile gösterilen aralıkları bulup küme olarak ifade ediniz.

a)


b)


c)


ç)


3. $(a+1)x^2 - (a+2)x - 8 = 0$ denklemi x değişkenine bağlı birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olduğuna göre a ve x değerlerini bulunuz.

4. Aşağıda verilen denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $5x - 3 = 0$
b) $4x + 8 = 0$
c) $6x - 13 = 0$
ç) $7x + 8 = 7x - 1$
d) $4(x-3) + 5 = 3x - 1$
e) $\dfrac{x-1}{3} + \dfrac{x-2}{4} = 1$

5. $7x + 3m + 8 = 0$ denkleminin kökü -1 olduğuna göre m değerini bulunuz.

6. $\dfrac{2x-3}{5} = \dfrac{3x-2}{4}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

7. $(a+b)x + 2b - 4 = 0$ denkleminin çözüm kümesi $Ç = \mathbb{R}$ olduğuna göre a değerini bulunuz.

8. $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{x}$

denkleminin kökü 2 olduğuna göre a değerini bulunuz.

9. Bir sayının 4 katının 6 eksiği, aynı sayının 3 katının 11 fazlası olduğuna göre bu sayıyı bulunuz.

10. $\left.\begin{aligned} x + y &= 12 \\ x - y &= -4 \end{aligned}\right\}$

denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

11. $\left.\begin{aligned} 3x + 2y &= 4 \\ 5x - 3y &= 13 \end{aligned}\right\}$

denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

12. $\left.\begin{aligned} 4x + 3y &= 20 \\ 3x + 4y &= 15 \end{aligned}\right\}$

olduğuna göre $x + y$ kaçtır?

4.1.4. Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

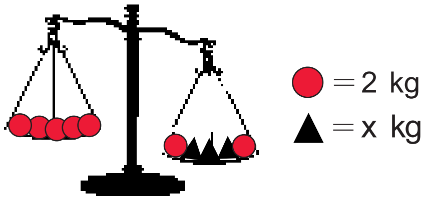
İki niceliğin birbirinden küçük ya da büyük olma durumunu belirten bağıntılara **eşitsizlik** adı verilir. Eşitsizlikler " $<, \leq, >, \geq$ " sembolleri kullanılarak ifade edilir.

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$, $ax + b > 0$ ve $ax + b \geq 0$ biçimindeki ifadelere **x değişkenine bağlı birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikler** denir. Eşitsizliği sağlayan x değerlerinin kümesine **eşitsizliğin çözüm kümesi** denir.

$3x + 4 < 0$, $-2x + 5 \leq 0$, $\sqrt{2}x - 4 > 0$, $\frac{1}{2}x + 7 \geq 0$ eşitsizlikleri birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizliklerdir.

ÖRNEK

Yanda verilen eşit kollu terazi modeline karşılık gelen matematiksel ifadeyi bulunuz.



Görsel 4.3

ÇÖZÜM

Sol kefe yukarı, sağ kefe aşağı yönde olduğuna göre sağ kefedeki ağırlıklar toplamı sol kefedeki ağırlıklar toplamından büyüktür. O hâlde ●+●+●+●+●<●+●+▲+▲+▲ olur.
Bu durumda $2 + 2 + 2 + 2 + 2 < 2 + 2 + x + x + x \Rightarrow 10 < 4 + 3x$ bulunur.

Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizliklerin Özellikleri

1. $a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere

$$a + c < b + c$$
$$a - c < b - c \text{ olur.}$$

Bir eşitsizliğin her iki tarafına aynı gerçek sayı eklenir veya çıkarılırsa eşitsizliğin yönü değişmez.

ÖRNEK

$x + 2 < 5$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x + 2 < 5 \Rightarrow x + 2 - 2 < 5 - 2$

$\Rightarrow x < 3$ olur.

Bu durumda eşitsizliğin çözüm kümesi $Ç = \{x \mid x < 3, x \in \mathbb{R}\} = (-\infty, 3)$ bulunur.

2. $a, b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^+$ ve $a < b$ olmak üzere

$a \cdot c < b \cdot c$

$\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ olur.

Bir eşitsizliğin her iki tarafı aynı pozitif gerçek sayı ile çarpılır veya bölünürse eşitsizliğin yönü değişmez.

ÖRNEK

$3x - 9 \geq 6$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$3x - 9 \geq 6 \Rightarrow 3x - 9 + 9 \geq 6 + 9$$
$$\Rightarrow 3x \geq 15$$
$$\Rightarrow \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} \geq \frac{15}{\cancel{3}}$$
$$\Rightarrow x \geq 5 \text{ olur.}$$

Bu durumda eşitsizliğin çözüm kümesi $Ç = \{x \mid 5 \leq x,\ x \in \mathbb{R}\} = [5, \infty)$ bulunur.

ÖRNEK

$3(6 - x) \geq 2(x - 1)$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$3(6 - x) \geq 2(x - 1) \Rightarrow 18 - 3x \geq 2x - 2$$
$$\Rightarrow 2 + 18 - 3x \geq 2x - 2 + 2$$
$$\Rightarrow 20 - 3x \geq 2x$$
$$\Rightarrow 20 - 3x + 3x \geq 2x + 3x$$
$$\Rightarrow 20 \geq 5x \Rightarrow \frac{20}{5} \geq \frac{\cancel{5}x}{\cancel{5}} \Rightarrow 4 \geq x \text{ olur.}$$

Bu durumda eşitsizliğin çözüm kümesi $Ç = \{x \mid x \leq 4, x \in \mathbb{R}\} = (-\infty, 4]$ bulunur.

ÖRNEK

$10 \leq 3x - 2 < 16$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$10 \leq 3x - 2 < 16 \Rightarrow 10 + 2 \leq 3x - 2 + 2 < 16 + 2$$
$$\Rightarrow 12 \leq 3x < 18$$
$$\Rightarrow \frac{12}{3} \leq \frac{3x}{3} < \frac{18}{3}$$
$$\Rightarrow 4 \leq x < 6 \text{ olur.}$$

Bu durumda eşitsizliğin çözüm kümesi $Ç = \{x \mid 4 \leq x < 6, x \in \mathbb{R}\} = [4, 6)$ bulunur.

ÖRNEK

$2x + 10 \leq 3x + 2 < x + 26$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$2x + 10 \leq 3x + 2 < x + 26$ eşitsizliği $2x + 10 \leq 3x + 2$ ve $3x + 2 < x + 26$ şeklinde iki ayrı eşitsizlik hâlinde yazılır. Bu iki eşitsizlik çözülüp çözüm kümelerinin kesişimi alınır.

$$2x + 10 \leq 3x + 2 \Rightarrow 2x + 10 - 2x - 2 \leq 3x + 2 - 2x - 2$$
$$\Rightarrow 8 \leq x \text{ olur.}$$
$$3x + 2 < x + 26 \Rightarrow 3x + 2 - x - 2 < x + 26 - x - 2$$
$$\Rightarrow 2x < 24$$
$$\Rightarrow \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} < \frac{24}{2}$$
$$\Rightarrow x < 12 \text{ olur.}$$

$8 \leq x$ ve $x < 12$ aralıklarının kesişimi $8 \leq x < 12$ olduğundan eşitsizliğin çözüm kümesi $Ç = \{x \mid 8 \leq x < 12, x \in \mathbb{R}\} = [8, 12)$ bulunur.

3. $a, b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^-$ ve $a < b$ olmak üzere

$$a \cdot c > b \cdot c$$
$$\frac{a}{c} > \frac{b}{c} \text{ olur.}$$

Bir eşitsizliğin her iki tarafı aynı negatif gerçek sayı ile çarpılır veya bölünürse eşitsizliğin yönü değişir.

ÖRNEK

$4 - 5x < 24$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$4 - 5x < 24 \Rightarrow 4 - 5x - 4 < 24 - 4$$
$$\Rightarrow -5x < 20$$
$$\Rightarrow \frac{\cancel{-5}x}{\cancel{-5}} > \frac{20}{-5}$$
$$\Rightarrow x > -4 \text{ olur.}$$

Bu durumda eşitsizliğin çözüm kümesi $Ç = \{x \mid -4 < x,\ x \in \mathbb{R}\} = (-4, \infty)$ bulunur.

ÖRNEK

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $-1 < x < 4$ olduğuna göre $-2x + 1$ ifadesinin alabileceği en küçük tam sayı değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x \in \mathbb{R}$ olduğundan verilen aralık kullanılarak $-2x + 1$ elde edilir.

$-2x + 1$ de x in katsayısı -2 olduğu için verilen aralık -2 ile çarpılır ve eşitsizlik yön değiştirir.

$-2 / -1 < x < 4 \Rightarrow 2 > -2x > -8$ olur.

Eşitsizliğin her iki tarafına 1 eklenir, eşitsizlik yön değiştirmez.

$1 + 2 > -2x + 1 > -8 + 1 \Rightarrow 3 > -2x + 1 > -7$ olur.

Bu durumda $-2x + 1$ ifadesinin alabileceği en küçük tam sayı değeri -6 bulunur.

4. $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < x < b$ ve $c < y < d$ olmak üzere

$$\begin{array}{rl} & a < x < b \\ + & c < y < d \\ \hline & a + c < x + y < b + d \end{array}$$ olur.

Aynı yönlü eşitsizlikler taraf tarafa toplanabilir.

ÖRNEK

x ve y birer tam sayı, $-2 < x \leq 5$ ve $-1 \leq y < 4$ olmak üzere $2x + y$ ifadesinin alabileceği en büyük tam sayı değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

x ve y birer tam sayı olduğundan $2x + y$ ifadesinin alabileceği en büyük tam sayı değeri verilen aralıklardan x ve y nin alabileceği en büyük tam sayı değerlerinin $2x + y$ ifadesinde yerlerine yazılmasıyla bulunur.

$-2 < x \leq 5$ aralığında x in en büyük tam sayı değeri 5 ve
$-1 \leq y < 4$ aralığında y nin en büyük tam sayı değeri 3 olur.

Bu durumda $2x + y$ ifadesinin en büyük değeri $2 \cdot 5 + 3 = 13$ bulunur.

ÖRNEK

$x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $-3 < x \leq 4$ ve $-2 < y \leq 1$ olduğuna göre $3x + 4y$ ifadesinin alabileceği <u>en büyük</u> ve <u>en küçük</u> tam sayı değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x, y \in \mathbb{R}$ olduğundan verilen aralıklar kullanılarak $3x + 4y$ elde edilir. $3x + 4y$ ifadesinde x in katsayısı 3 ve y nin katsayısı 4 olduğundan verilen aralıklar sırasıyla 3 ve 4 ile çarpılarak taraf tarafa toplanırsa

$$3 / -3 < x \leq 4$$
$$4 / -2 < y \leq 1$$
$$-9 < 3x \leq 12$$
$$+ \quad -8 < 4y \leq 4$$
$$-9 - 8 < 3x + 4y \leq 12 + 4 \Rightarrow -17 < 3x + 4y \leq 16 \text{ olur.}$$

Bu durumda $3x + 4y$ ifadesinin alabileceği en büyük tam sayı değeri 16 ve en küçük tam sayı değeri -16 bulunur.

5. $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve a ile b aynı işaretli olmak üzere

$$a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \text{ olur.}$$

ÖRNEK

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\frac{1}{4} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$ olduğuna göre x in alabileceği değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

$\frac{1}{4} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{1} \leq \frac{x}{1} < \frac{4}{1} \Rightarrow 2 \leq x < 4$ olur. Bu durumda x in değer aralığı $[2, 4)$ bulunur.

ÖRNEK

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\frac{1}{3} \geq \frac{1}{x-1} > \frac{1}{7}$ olduğuna göre x in alabileceği değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{1}{3} \geq \frac{1}{x-1} > \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{3}{1} \leq \frac{x-1}{1} < \frac{7}{1} \Rightarrow 3 \leq x - 1 < 7 \Rightarrow 3 + 1 \leq x - 1 + 1 < 7 + 1$$

$\Rightarrow 4 \leq x < 8$ olur. Bu durumda x in değer aralığı $[4, 8)$ bulunur.

ÖRNEK

x bir tam sayı olmak üzere iki bidonda bulunan su miktarları aşağıda gösterilmiştir:

I. bidon: $5x$ litre
II. bidon: $(2x + 18)$ litre

I. bidondaki su miktarı II. bidondaki su miktarından daha fazla olduğuna göre x in alabileceği değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

I. bidondaki su miktarı II. bidondaki su miktarından daha fazla olduğundan $5x > 2x + 18$ olur. O hâlde

$$\begin{aligned} 5x > 2x + 18 &\Rightarrow 5x - 2x > 2x + 18 - 2x \\ &\Rightarrow 3x > 18 \\ &\Rightarrow \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} > \frac{18}{3} \\ &\Rightarrow x > 6 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Bu durumda x in değer aralığı $(6, \infty)$ bulunur.

ÖRNEK

55 kg ağırlığında olan Nihat, en fazla 395 kg yük taşıyabilen bir asansöre biniyor. Asansörde Nihat dışında 4 kişi daha vardır. Asansör hareket edebildiğine göre Nihat dışındaki 4 kişinin ağırlık ortalamasının <u>en fazla</u> kaç kg olabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Asansörde bulunan 4 kişinin ağırlıkları ortalaması x kg olsun. Bu nedenle asansördeki toplam ağırlık $(4x + 55)$ olur. Asansör en fazla 395 kg yük taşıyabildiğine göre $4x + 55 \leq 395$ olur.

O hâlde

$$\begin{aligned} 4x + 55 \leq 395 &\Rightarrow 4x + 55 - 55 \leq 395 - 55 \\ &\Rightarrow 4x \leq 340 \\ &\Rightarrow \frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}} \leq \frac{340}{4} \\ &\Rightarrow x \leq 85 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Bu durumda asansörde bulunan 4 kişinin ağırlıkları ortalaması en fazla 85 kg bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıda verilen eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $x + 4 < 0$

b) $x - 2 \leq 5$

c) $4x - 5 > 7$

ç) $9 - 2x < 17$

d) $-x - 20 \geq 0$

e) $\frac{x}{3} - \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$

2. $5x + 7 \leq 4x + 12 < 6x - 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

3. $9 \leq 2x - 3 < 21$ eşitsizliğinin çözüm kü- mesini bulunuz.

4. x ve y birer tam sayı, $-1 \leq x < 4$ ve $-2 < y \leq 6$ olmak üzere $3x + 2y$ ifadesinin alabileceği en küçük tam sayı değerini bulunuz.

5. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $0 < x \leq 3$ ve $-4 < y \leq 4$ olduğuna göre $4x + 5y$ ifadesinin alabileceği en büyük ve en küçük tam sayı değerlerini bulunuz.

6. $x \in \mathbb{R}$, $-2 < x \leq 3$ olduğuna göre $-x + 4$ ün alabileceği en büyük ve en küçük tam sayı değerlerini bulunuz.

7. Yaşça en küçükleri Ahmet ve en büyükleri Aynur olan üç arkadaştan Ahmet'in yaşı $2x - 1$, Aslı'nın yaşı $3x - 4$ ve Aynur'un yaşı $x + 6$ dır. x bir doğal sayı olduğuna göre Aslı'nın yaşını bulunuz.

8. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $-1 < \frac{x - 2}{4} \leq 3$ ise x in değer aralığını bulunuz.

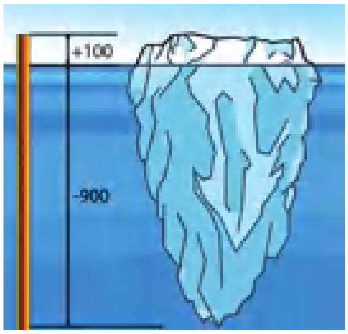
9. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $-2 \leq a \leq 3$ eşitsizliği veriliyor. $4a + 5$ ifadesinin alabileceği kaç farklı tam sayı değerinin olduğunu bulunuz.

10. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\frac{1}{6} < \frac{1}{2x + 2} < \frac{1}{4}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

4.1.5. Mutlak Değer İçeren Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklem ve Eşitsizlikler

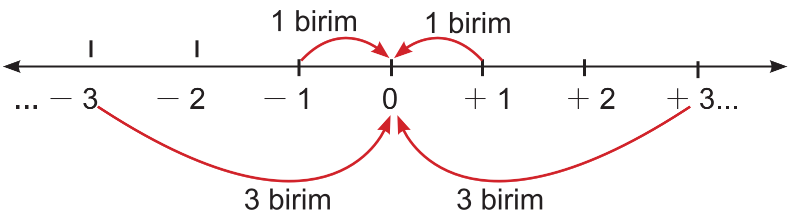
Mutlak Değer

Yandaki şekilde bir buz dağının denizin altında ve üstünde kalan kısımlarına ait konumlar verilmiştir. Buz dağının denizin altında ve üstünde kalan kısımlarının deniz seviyesine olan uzaklıkları sırasıyla 900 m ve 100 m olmasına rağmen konumlarının -900 ve $+100$ olduğu görülmektedir. Buna göre bir yerin konumu belli bir başlangıç noktasına göre negatif olabilirken uzaklık asla negatif değer alamaz.



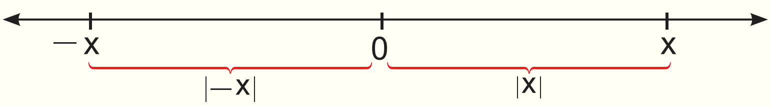
Görsel 4.4

Gündelik yaşamda uzaklık, ağırlık, uzunluk gibi değerler ifade edilirken pozitif sayılardan yararlanılmaktadır. Balıkesir-İstanbul arası uzaklık -292 km, bir insanın ağırlığı -75 kg, bir ağacın boyu -3 m gibi ifadeler hiçbir karşılığı ve anlamı olmayan ifadelerdir. Ancak denizin 1500 m derinliğinde bulunan bir denizaltı ile aynı hizada deniz seviyesinden 300 m yükseklikte bulunan bir kuşun deniz seviyesine olan uzaklıklarını ifade etmek için artı ve eksi ifadelerinin bir değeri ve anlamı vardır.



Sayı doğrusu üzerinde -1 ve $+1$ sayılarının 0 sayısına olan uzaklıkları eşit ve 1 birimdir. -3 ve $+3$ sayılarının 0 sayısına olan uzaklıkları 3 birimdir. Bu nedenle uzaklık değeri pozitif olarak ifade edilebilir, negatif olarak ifade edilemez.

Bir gerçek sayının sayı doğrusu üzerindeki yerinin sıfır sayısına (başlangıç noktasına) olan uzaklığına bu sayının **mutlak değeri** denir. Bir x gerçek sayısının mutlak değeri $|x|$ şeklinde gösterilir.



x gerçek sayısının mutlak değeri

$x < 0$ ise $|x| = -x$

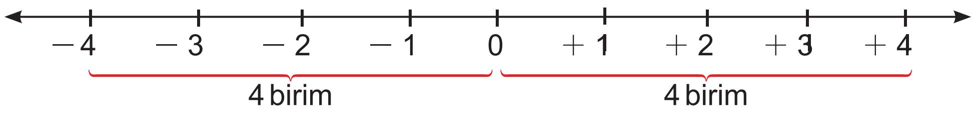
$x = 0$ ise $|x| = 0$

$x > 0$ ise $|x| = x$ biçimindedir.

ÖRNEK

Sayı doğrusu üzerinde başlangıç noktasına 4 birim uzaklıkta bulunan sayıları bulunuz.

ÇÖZÜM



Sayı doğrusu üzerinde gösterildiği gibi -4 ve 4 tam sayılarının 0 sayısına olan uzaklıkları 4 birimdir.

Bu durumda $|(+4)-(0)| = 4$ ve $|(-4)-(0)| = 4$ bulunur.

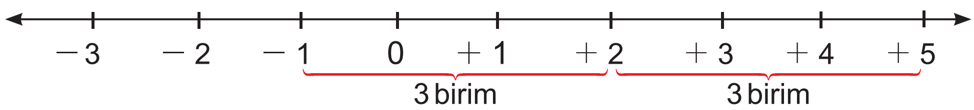
SONUÇ

Sayı doğrusu üzerinde bulunan x ve y gerçek sayıları arasındaki uzaklık $|x-y|$ olarak bulunur.

ÖRNEK

Sayı doğrusu üzerinde 2 tam sayısına 3 birim uzaklıkta bulunan sayıları bulunuz.

ÇÖZÜM



Sayı doğrusu üzerinde gösterildiği gibi -1 ve $+5$ tam sayılarının 2 tam sayısına olan uzaklıkları 3 birimdir.

Bu durumda $|(+5)-(+2)| = 3$ ve $|(-1)-(+2)| = 3$ bulunur.

ÖRNEK

Aşağıda verilen rasyonel sayıların mutlak değerlerini bulunuz.

a) $-\frac{1}{2}$ b) $+\frac{1}{3}$ c) -4 ç) $-\frac{5}{6}$ d) $\frac{3}{4}$

ÇÖZÜM

a) $\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ b) $\left|+\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$ c) $|-4| = 4$ ç) $\left|-\frac{5}{6}\right| = \frac{5}{6}$ d) $\left|\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$ bulunur.

ÖRNEK

Aşağıda verilen mutlak değerli ifadelerin eşitini bulunuz.

a) $|-10|$ b) $|-1|$ c) $\left|\frac{1}{27}\right|$ ç) $\left|-\frac{3}{19}\right|$ d) $\left|\frac{5}{6}\right|$

ÇÖZÜM

a) $-10 < 0$ olduğundan $|-10| = -(-10) = +10$ olur.

b) $-1 < 0$ olduğundan $|-1| = -(-1) = +1$ olur.

c) $\frac{1}{27} > 0$ olduğundan $\left|\frac{1}{27}\right| = +\frac{1}{27}$ olur.

ç) $-\frac{3}{19} < 0$ olduğundan $\left|-\frac{3}{19}\right| = -\left(-\frac{3}{19}\right) = +\frac{3}{19}$ olur.

d) $\frac{5}{6} > 0$ olduğundan $\left|\frac{5}{6}\right| = +\frac{5}{6}$ bulunur.

ÖRNEK

$|x+3| + |x-1|$ ifadesinin alabileceği <u>en küçük</u> değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Mutlak değerli bir ifadenin en küçük değeri 0 dır. O hâlde $|x+3| = 0$ ve $|x-1| = 0$ için x değerleri bulunup sırasıyla ifadede yerine yazılır. Bu değerlerden biri için ifade en küçük değerini alır.

$|x+3| = 0$ ise $x = -3$ olur. $x = -3$ için
$|-3+3| + |-3-1| = |0| + |-4| = 0 + 4 = 4,$
$|x-1| = 0$ ise $x = +1$ olur. $x = +1$ için
$|+1+3| + |+1-1| = |+4| + |0| = 4 + 0 = 4$ olur.

Bu durumda $|x+3| + |x-1|$ ifadesinin alabileceği en küçük değer 4 bulunur.

ÖRNEK

$2 < x < 3$ olmak üzere $|x-2| + |3-x|$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$2 < x < 3$ olduğundan mutlak değer içindeki her bir ifadenin işareti incelenmelidir.
$x > 2$ olduğundan $x - 2 > 0$ dır. O hâlde $|x-2| = x - 2$ olur.
$3 > x$ olduğundan $3 - x > 0$ dır. O hâlde $|3-x| = 3 - x$ olur.
Bu durumda $\underbrace{|x-2|}_{+} + \underbrace{|3-x|}_{+} = x - 2 + 3 - x = -2 + 3 = 1$ bulunur.

ÖRNEK

$1 < x < 2$ olmak üzere $|1 - x| + |x - 2|$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$1 < x < 2$ olduğundan mutlak değer içindeki her bir ifadenin işareti incelenmelidir.
$1 < x$ olduğundan $1 - x < 0$ dır. O hâlde $|1 - x| = -(1 - x) = -1 + x$ olur.
$x < 2$ olduğundan $x - 2 < 0$ dır. O hâlde $|x - 2| = -(x - 2) = -x + 2$ olur.
Bu durumda $\underbrace{|1 - x|}_{-} + \underbrace{|x - 2|}_{-} = -1 + x - x + 2 = -1 + 2 = 1$ bulunur.

ÖRNEK

$-2 < x < 0$ olmak üzere $|x| + |x + 5| + |x - 1|$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$x < 0$ olduğundan $|x| = -x$ olur.
$-2 < x \Rightarrow x + 5 > 0$ dır. O hâlde $|x + 5| = x + 5$ olur.
$x < 0 \Rightarrow x - 1 < 0$ dır. O hâlde $|x - 1| = -(x - 1) = -x + 1$ olur.
Bu durumda $\underbrace{|x|}_{-} + \underbrace{|x + 5|}_{+} + \underbrace{|x - 1|}_{-} = -x + x + 5 - x + 1 = -x + 6$ bulunur.

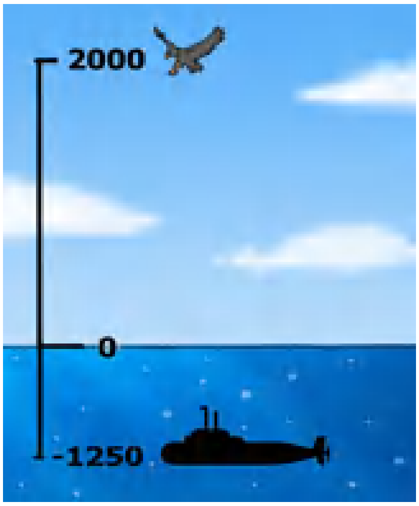
ÖRNEK

Denizin 1250 m derinliğinde bulunan bir denizaltı ile aynı hizada deniz seviyesinden 2000 m yükseklikte bulunan bir kartalın deniz seviyesine olan uzaklıkları toplamının kaç metre olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Deniz seviyesinin konumu 0 kabul edilir. Denizaltı, denizin 1250 m derinliğinde olduğundan denizaltının konumu -1250 alınır. Kartal deniz seviyesinin 2000 m üstünde olduğu için kartalın konumu $+2000$ alınır.

Bu durumda
$|-1250| + |+2000| = 1250 + 2000 = 3250$ m bulunur.



Görsel 4.5

4. ÜNİTE: DENKLEMLER

Mutlak Değerli İfadelerin Özellikleri

1. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|x| = |-x|$ olur.

2. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|x - y| = |y - x|$ olur.

3. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ olur.

4. $x, y \in \mathbb{R}$ ve $y \neq 0$ olmak üzere $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ olur.

ÖRNEK

$x \in \mathbb{R}$ ve $x \neq 0$ olmak üzere

$\frac{|3x| + |-2x|}{|-x|}$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$|3x| = |3| \cdot |x| = 3|x|$

$|-2x| = |-2| \cdot |x| = 2|x|$

$|-x| = |x|$ olur. Bu durumda

$$\frac{|3x| + |-2x|}{|-x|} = \frac{|3| \cdot |x| + |-2| \cdot |x|}{|x|} = \frac{3 \cdot |x| + 2 \cdot |x|}{|x|} = \frac{5 \cdot \cancel{|x|}}{\cancel{|x|}} = 5 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$x, y \in \mathbb{R}$ ve $x \neq y$ olmak üzere

$\frac{|6x - 6y|}{2|x - y| + |y - x|}$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$|6x - 6y| = |6(x - y)| = 6|x - y|$ ve

$|y - x| = |x - y|$ olur. Bu durumda

$$\frac{|6x - 6y|}{2|x - y| + |y - x|} = \frac{|6(x - y)|}{2|x - y| + |x - y|} = \frac{6\cancel{|x - y|}}{3\cancel{|x - y|}} = 2 \text{ bulunur.}$$

Mutlak Değer İçeren Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

Birinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklemin içinde mutlak değerli ifadeler varsa bu tür denklemlere **mutlak değer içeren birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler** denir.

$|x| = 1$, $2|x - 4| - 5 = 0$, $5|x + 1| - 25 = 0$ denklemleri mutlak değer içeren denklemlerdir. Bu tür denklemlerin çözüm kümesi aşağıdaki çözüm yöntemlerinden biri kullanılarak bulunur.

Mutlak değerli denklemlerin çözüm yöntemleri şu şekildedir:

- $x \in \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $|x| = a$ ise $x = a$ veya $x = -a$ olur.
- $x \in \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}^-$ olmak üzere $|x| = a$ ise $Ç = \varnothing$ olur.
- $|x| = 0$ ise $x = 0$ olur.
- $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|x| = |y|$ ise $x = y$ veya $x = -y$ olur.
- $|x| + |y| = 0$ ise $x = 0$ ve $y = 0$ olur.

ÖRNEK

$|2x - 4| = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} |2x - 4| = 0 &\Rightarrow 2x - 4 = 0 \\ &\Rightarrow 2x = 4 \\ &\Rightarrow \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \frac{4}{2} \\ &\Rightarrow x = 2 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Bu durumda denklemin çözüm kümesi $Ç = \{2\}$ bulunur.

ÖRNEK

$|x| = 4$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$|x| = 4 \Rightarrow x = 4$ veya $x = -4$ olur.

Bu durumda denklemin çözüm kümesi $Ç = \{-4, 4\}$ bulunur.

ÖRNEK

$|3x-6|=9$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$|3x-6|=9 \Rightarrow 3x-6=9 \text{ veya } 3x-6=-9$$
$$\Rightarrow 3x=9+6 \text{ veya } 3x=-9+6$$
$$\Rightarrow 3x=15 \text{ veya } 3x=-3$$
$$\Rightarrow \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}}=\frac{15}{3} \text{ veya } \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}}=-\frac{3}{3}$$
$$\Rightarrow x=5 \text{ veya } x=-1 \text{ olur.}$$

Bu durumda denklemin çözüm kümesi $Ç=\{-1,5\}$ bulunur.

ÖRNEK

$|5x+7|+1=18$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$|5x+7|+1=18 \Rightarrow |5x+7|=17$$
$$\Rightarrow 5x+7=17 \text{ veya } 5x+7=-17$$
$$\Rightarrow 5x=17-7 \text{ veya } 5x=-17-7$$
$$\Rightarrow 5x=10 \text{ veya } 5x=-24$$
$$\Rightarrow \frac{\cancel{5}x}{\cancel{5}}=\frac{10}{5} \text{ veya } \frac{\cancel{5}x}{\cancel{5}}=-\frac{24}{5}$$
$$\Rightarrow x=2 \text{ veya } x=-\frac{24}{5} \text{ olur.}$$

Bu durumda denklemin çözüm kümesi $Ç=\left\{-\frac{24}{5},2\right\}$ bulunur.

ÖRNEK

$|5x|+|-2x|=14$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$|5x|=|5|\cdot|x|=5|x|$ ve $|-2x|=|-2|\cdot|x|=2|x|$ olur. O hâlde

$$|5x|+|-2x|=14 \Rightarrow 5|x|+2|x|=14$$
$$\Rightarrow 7|x|=14$$
$$\Rightarrow \frac{\cancel{7}|x|}{\cancel{7}}=\frac{14}{7}$$
$$\Rightarrow |x|=2 \text{ elde edilir.}$$

$|x|=2$ ise $x=2$ veya $x=-2$ olur.

Bu durumda denklemin çözüm kümesi $Ç=\{-2,2\}$ bulunur.

ÖRNEK

$|4 - x| + |x - 4| = 8$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$|4 - x| = |x - 4|$ olduğundan

$$|4 - x| + |x - 4| = 8 \Rightarrow |x - 4| + |x - 4| = 8$$
$$\Rightarrow 2|x - 4| = 8$$
$$\Rightarrow \frac{\cancel{2}|x - 4|}{\cancel{2}} = \frac{8}{2}$$
$$\Rightarrow |x - 4| = 4 \text{ elde edilir.}$$

$$|x - 4| = 4 \Rightarrow x - 4 = 4 \text{ veya } x - 4 = -4$$
$$\Rightarrow x = 4 + 4 \text{ veya } x = -4 + 4$$
$$\Rightarrow x = 8 \text{ veya } x = 0 \text{ olur.}$$

Bu durumda denklemin çözüm kümesi $Ç = \{0, 8\}$ bulunur.

ÖRNEK

$|x - 1| + |2x - 2| = 3$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$|2x - 2| = |2(x - 1)| = |2| \cdot |x - 1| = 2|x - 1|$ olduğundan

$$|x - 1| + |2x - 2| = 3 \Rightarrow |x - 1| + 2|x - 1| = 3$$
$$\Rightarrow 3|x - 1| = 3$$
$$\Rightarrow \frac{\cancel{3}|x - 1|}{\cancel{3}} = \frac{3}{3}$$
$$\Rightarrow |x - 1| = 1 \text{ elde edilir.}$$

$$|x - 1| = 1 \Rightarrow x - 1 = 1 \text{ veya } x - 1 = -1$$
$$\Rightarrow x = 1 + 1 \text{ veya } x = -1 + 1$$
$$\Rightarrow x = 2 \text{ veya } x = 0 \text{ olur.}$$

Bu durumda denklemin çözüm kümesi $Ç = \{0, 2\}$ bulunur.

ÖRNEK

$2|3x-5|+1=-10$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$2|3x-5|+1=-10 \Rightarrow 2|3x-5|=-10-1$$
$$\Rightarrow 2|3x-5|=-11$$
$$\Rightarrow \frac{\cancel{2}|3x-5|}{\cancel{2}}=-\frac{11}{2}$$
$$\Rightarrow |3x-5|=-\frac{11}{2} \text{ elde edilir.}$$

$-\frac{11}{2}<0$ olduğundan $|3x-5|=-\frac{11}{2}$ denklemini sağlayan bir gerçek sayı yoktur.

Bu durumda denklemin çözüm kümesi $Ç=\varnothing$ bulunur.

ÖRNEK

$|x-2|+|y-5|=0$ denklemini sağlayan x ve y değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$|x-2|+|y-5|=0 \Rightarrow |x-2|=0$ ve $|y-5|=0$ olacağından
$x-2=0$ ve $y-5=0$ olur.

Bu durumda $x=2$ ve $y=5$ bulunur.

ÖRNEK

$|3x-1|=|2x+4|$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$|3x-1|=|2x+4| \Rightarrow 3x-1=2x+4$ veya $3x-1=-(2x+4)$ olur. O hâlde

$3x-1=2x+4 \Rightarrow 3x-2x=4+1$ veya $3x-1=-2x-4 \Rightarrow 3x+2x=-4+1$

$\Rightarrow x=5$

$\Rightarrow \frac{\cancel{5}x}{\cancel{5}}=-\frac{3}{5}$

$\Rightarrow x=-\frac{3}{5}$ olur.

Bu durumda denklemin çözüm kümesi $Ç=\left\{-\frac{3}{5},5\right\}$ bulunur.

Mutlak Değer İçeren Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

Birinci dereceden bir bilinmeyenli bir eşitsizliğin içinde mutlak değerli ifadeler varsa bu tür eşitsizliklere **mutlak değer içeren birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikler** denir.

$|x| < 5$, $|x-4| \leq 7$, $|x| > 3$, $|x+1| \geq 6$ eşitsizlikleri mutlak değer içeren birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizliklerdir.

Mutlak değer içeren eşitsizliklerin çözüm yöntemleri şu şekildedir:

- $x \in \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $|x| \leq a$ ise $-a \leq x \leq a$ olur.
- $x \in \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $|x| \geq a$ ise $x \geq a$ veya $x \leq -a$ olur.

ÖRNEK

$|x| < 5$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$|x| < 5 \Rightarrow \; -5 < x < 5$ olur.

Bu durumda eşitsizliğin çözüm kümesi $(-5, 5)$ bulunur.

ÖRNEK

$|x| \geq 7$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$|x| \geq 7 \Rightarrow x \geq 7$ veya $x \leq -7$ olur.

Bu durumda eşitsizliğin çözüm kümesi $(-\infty, -7] \cup [7, \infty)$ bulunur.

ÖRNEK

$|x| > 3$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$|x| > 3 \Rightarrow x > 3$ veya $x < -3$ olur.

Bu durumda eşitsizliğin çözüm kümesi $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$ bulunur.

ÖRNEK

$|x-3| \leq 8$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$|x-3| \leq 8 \Rightarrow -8 \leq x-3 \leq 8$
$\Rightarrow -8+3 \leq x-3+3 \leq 8+3$
$\Rightarrow -5 \leq x \leq 11$ olur.

Bu durumda eşitsizliğin çözüm kümesi $[-5, 11]$ bulunur.

ÖRNEK

$|x+4| > 6$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$|x+4| > 6 \Rightarrow x+4 > 6$ veya $x+4 < -6$
$\Rightarrow x+4-4 > 6-4$ veya $x+4-4 < -6-4$
$\Rightarrow x > 2$ veya $x < -10$ olur.

Bu durumda eşitsizliğin çözüm kümesi $(-\infty, -10) \cup (2, \infty)$ bulunur.

ÖRNEK

$|2x-8| \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Mutlak değerli bir ifade negatif olamaz. Bu nedenle $|2x-8| = 0$ denkleminin çözümü bulunmalıdır.

$|2x-8| = 0 \Rightarrow 2x-8 = 0$
$\Rightarrow 2x = 8$
$\Rightarrow x = 4$ olur.

Bu durumda eşitsizliğin çözüm kümesi $\{4\}$ bulunur.

ÖRNEK

$|5x-15| \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Mutlak değerli bir ifade 0 a eşit veya 0 dan büyük olmalıdır. Verilen ifade her iki koşulu da sağladığından çözüm kümesi $\mathbb{R}$ dır.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıda verilen mutlak değerli ifadelerin eşitini bulunuz.

a) $|3|$

b) $|-4|$

c) $\left|\dfrac{1}{12}\right|$

ç) $\left|-\dfrac{1}{48}\right|$

2. $-1 < x < 0$ olmak üzere $|x-1|+|2-x|$ ifadesinin eşitini bulunuz.

3. $|x+6|+|x-4|$ ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

4. $x \in \mathbb{R}$ ve $x \neq 0$ olmak üzere $\dfrac{|5x|+|-x|}{|-2x|}$ ifadesinin değerini bulunuz.

5. $x, y \in \mathbb{R}$ ve $x \neq y$ olmak üzere

$$\frac{|8x-8y|}{|3y-3x|-|x-y|}$$

ifadesinin değerini bulunuz.

6. $|5x+2| = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

7. Aşağıda verilen denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $|x| = 2$

b) $|4x-7| = 21$

c) $|4x+15|+8 = 0$

ç) $|6x+8|+5 = 43$

d) $2|3x-1|-4 = 6$

e) $|-x|+|x| = 10$

8. $|2x-18|+|3y-33| = 0$ denklemini sağlayan x ve y değerlerini bulunuz.

9. $|x-4| < 9$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

10. $|3x-9| \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

11. $|3x-21| > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

1.

Yukarıda verilen sayı doğrusuna karşılık gelen aralık aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-10, 8]$ B) $[-10, 8]$ C) $(-10, 8)$ D) $[-10, 0) \cup (0, 8)$ E) $[-10, 8)$

2. $[-2, 8)$ na karşılık gelen küme aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{x \mid -2 \leq x < 8, x \in \mathbb{Z}\}$
B) $\{x \mid -2 < x < 8, x \in \mathbb{R}\}$
C) $\{x \mid -2 \leq x < 8, x \in \mathbb{R}\}$
D) $\{x \mid -2 < x \leq 8, x \in \mathbb{R}\}$
E) $\{x \mid -2 < x \leq 8, x \in \mathbb{Z}\}$

3. $4x - 64 = 0$

denklemini sağlayan x değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 16 E) 18

4. $5x + 3(x - 1) = 7x + 8$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{11\}$ B) $\{9\}$ C) $\{7\}$ D) $\{6\}$ E) $\{5\}$

5. $2(x - 1) + 3(x + 4) = 5(x + 2)$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{5\}$ B) $\varnothing$ C) $\mathbb{R}$ D) $\{10\}$ E) $\{5, 10\}$

6. $6x + 8 = 2(3x - 4)$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 4 C) 6 D) $\varnothing$ E) $\mathbb{R}$

7. $3x + a - 2 = 2x + 5$

denkleminin kökü 1 olduğuna göre a aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

8. Bir sayının 4 fazlasının 2 katı, aynı sayının 1 eksiğinin 3 katı olduğuna göre bu sayı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 15 B) 11 C) 8 D) -8 E) -11

9. $5x - 2y = 12$
$3x + y = 16$

denklem sisteminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{(3, -8)\}$ B) $\{(2, -6)\}$ C) $\{(4, 4)\}$ D) $\{(-4, 4)\}$ E) $\{(-2, 6)\}$

10. $2x + 7y = 32$
$7x + 2y = 40$

olduğuna göre $x + y$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 E) 7

11. $x + 8 \leq 13$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-5, 5)$ B) $(-\infty, 5]$ C) $(5, \infty)$ D) $[-5, \infty)$ E) $[-5, 5]$

12. $15 < 2x - 5 \leq 45$

eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{x \mid -10 \leq x < 25, x \in \mathbb{Z}\}$
B) $\{x \mid 15 < x < 45, x \in \mathbb{R}\}$
C) $\{x \mid 15 < x < 45, x \in \mathbb{R}\}$
D) $\{x \mid 10 \leq x \leq 25, x \in \mathbb{R}\}$
E) $\{x \mid 10 < x \leq 25, x \in \mathbb{R}\}$

13. $x, y \in \mathbb{R}$, $-2 < x \leq 5$ ve $-5 \leq y < 2$

olduğuna göre $2x - y$ ifadesinin alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

A) -6 B) -5 C) -4 D) -3 E) -2

14. İş başvurusunda bulunan bir işçiye iki farklı maaş önerilmiştir.
t, bir ay içerisinde çalışılan gün sayısı olmak üzere işçiye önerilen maaş seçenekleri aşağıdaki gibidir:

I. $2250 + 10t$
II. $2490 - 5t$

İşçinin hesabına göre I. teklif daha cazip olduğu için işçi I. teklifi kabul ediyor.

Buna göre t nin alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

A) 18 B) 17 C) 16 D) 15 E) 14

15. $1 < x < 2$ olmak üzere $|x-1| + |x-2|$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) -1 B) $2x - 3$ C) 1 D) $-2x + 3$ E) 3

16. $|x+1| + |3x+3| = 4$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{2, 1\}$ B) $\{0, 2\}$ C) $\{-2, 0\}$ D) $\{-1\}$ E) $\{0\}$

17. $|x-1| + |y+3| + |2z-8| = 0$

olduğuna göre $x + y + z$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

18. $|x-3| - 4 < 6$

eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[-7, 13]$ B) $(-7, 13)$ C) $[1, 5]$ D) $(1, 5)$ E) $(-3, 6)$

19. $|x-12| \geq 0$

eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[-12, 12]$ B) $(-12, 12)$ C) $\varnothing$ D) $[0, 12]$ E) $\mathbb{R}$

20-24. sorularda boş bırakılan yerlere uygun sözcük ya da değerleri yazınız.

20. $A = \{x \mid -3 < x \leq 5,\ x \in \mathbb{R}\}$ kümesine karşılık gelen aralık .... olur.

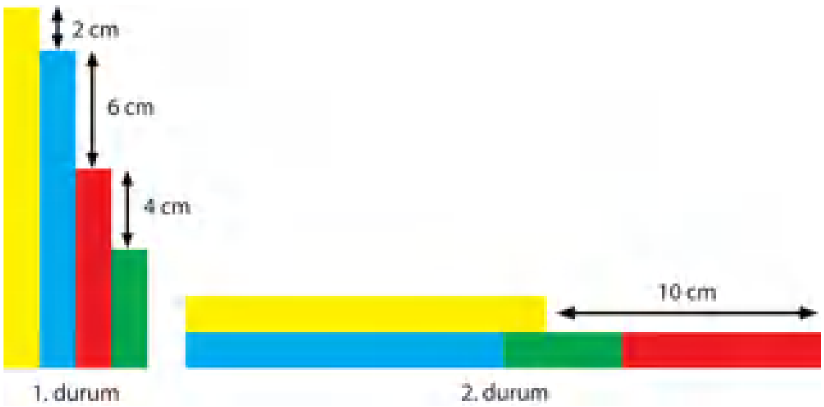
21. Sayı doğrusu üzerindeki bir sayının başlangıç noktasına olan uzaklığına o sayının .... denir.

22. $\dfrac{2x-4}{x-2} = 2$ denkleminin çözüm kümesi .... olur.

23. $2(x-5) = 2x + 10$ denkleminin çözüm kümesi .... olur.

24. $x \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $|5 - x| < 4$ eşitsizliğini sağlayan x değerlerinin toplamı .... olur.

25. Aşağıda sarı, mavi, kırmızı ve yeşil dört tane çubuğun iki durumu gösterilmiştir.



Görsel 4.6

Buna göre, dört çubuğun uzunlukları toplamı kaç santimetredir ?

CEVAP ANAHTARI

1.ÜNİTE: **MANTIK**

ALIŞTIRMALAR (s. 26)

1. I, IV

2. p': “Dörtgenin iç açılarının toplamı 360° değildir.”

3. a) 1 b) 0 c) 0 ç) 0 4. 0 5. 0

6. $p \equiv 0$ ve $q \equiv 0$

7.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \veebar q$
1	1	1	1	0
1	0	1	0	1
0	1	1	0	1
0	0	0	0	0

8. 1 9. 0

10. $p \equiv 1,\ q \equiv 0$

11. 1 12. 1

13. 0

14. $p \equiv 0,\ q \equiv 1,\ r \equiv 1$ 15. 1 16. 0

17. 0 18. 1

ALIŞTIRMALAR (s.34-35)

1. a) 1 b) 0 c) 1 ç) 1 2. 1

3. $p \equiv 0, q \equiv 1, r \equiv 0$ 4. 0 5. 1 6. 0

7. 1 8. $p \equiv 0, q \equiv 1, r \equiv 0$

9. " $2x \neq 6 \Rightarrow x \neq 3$ "

10. $A = 1,\ B = 1$ ve $C = 1$

11. “Hacer resim yapar ise Hacer öğretmendir.”

12. 0 13. “Yağmur dinmez ise gökkuşağı çıkmaz.”

14. $2x + 3 \neq 11 \Rightarrow x \neq 4$ 15. “ $x = 1 \Rightarrow 5x - 2 = 3$ ”

16. a) 1 b) 0 c) 1 ç) 0

17. $a \equiv 0,\ b \equiv 1,\ c \equiv 1$ ve $d \equiv 0$ 18. 1

19. $p' \Rightarrow q$ 20. p

21.

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$q \Leftrightarrow p$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	1

22. $p' \Rightarrow q$

23. Bazı reel sayıların karesinin 4 eksiği 0 dan büyük ya da eşittr.

24. $p'(x)$: " $\exists x \in \mathbb{N},\ x^4 - 12 < 0$ "

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME (s. 36-38)

1. B 2. B 3. E 4. D 5. E 6. B
7. D 8. A 9. C 10. C 11. E 12. C
13. A 14. E 15. A 16. B 17. A 18. D
19. D 20. 32 21. 0 22. 1

23. $p' \Rightarrow q'$: " $x \neq 4 \Rightarrow x^2 \neq 16$ "

24. $p'(x)$: " $\exists x \in \mathbb{N},\ 2x - 1 > 9$ "

25. “Bazı gerçek sayıların beş katının iki eksiği sıfırdır.”

26. III ve IV.

2.ÜNİTE: **KÜMELER**

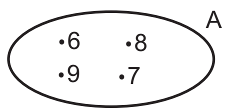
ALIŞTIRMALAR (s. 48)

1. I. Küme belirtmez II. Küme belirtir.
III. Küme belirtmez IV. Küme belirtir.
V. Küme belirtir.

2. $a \in A$ $f \in A$ $b \in A$ $2 \notin A$ $g \notin A$
$e \in A$ $c \in A$ $5 \notin A$ $h \notin A$

3. {Edirne, Çanakkale, Balıkesir, İzmir, Aydın, Muğla}

4.



5. {0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40}

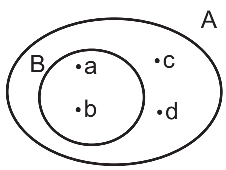
6. $s(A) = 12$ 7. A = {M, E, R, T}, $s(A) = 4$

8. $A = \{1, 3, 7, 8\}$, $s(A) = 4$

9. C 10. C 11. b ve c

ALIŞTIRMALAR (s. 54)

1. $B \subset A$



2.

Küme	Kümenin Alt Kümeleri
A = { }	{ }
B = {x}	{ }, {x}
C = {x,y}	{ }, {x}, {y}, {x,y}
D = {x,y,z}	{ }, {x}, {y}, {z}, {x,y}, {y,z}, {x,z}, {x,y,z}

3. I. $B \subset A$ II. $B \supset C$ III. $C \subset A$
IV. $A \supset B$ V. $C \subset B$ VI. $A \supset C$

4. 8 alt küme ve 4 5. 3 6. $A = B$

7. $A = B$ 8. 7

9. $A \neq B$ olduğundan A ile B birbirinin alt kümesi değildir.

10. 8

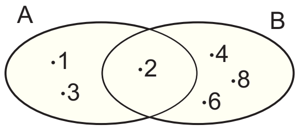
ALIŞTIRMALAR (s. 70)

1. $A \cap B = \{3,5\}$

2. $A \cap B = \{5,7\}, \ A \cup B = \{1,3,5,6,7,8,9\}$

3. $A \cap B = \{b,f\}, \ A = \{a,b,c,f\}, \ B = \{b,f,g,d\}$

4. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$



5. $A \cap B = \varnothing$ olduğundan ayrık kümelerdir.

6. {2,3,5} 7. { }

8. $A \setminus B = \{U,T\}$ ve $B \setminus A = \{O\}$

9. 18 10. {1,3,5} 11. 32 12. 7

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME (s. 71-74)

1. D 2. D 3. C 4. A 5. A 6. C
7. C 8. A 9. E 10. B 11. E 12.E
13. A 14. D 15. B 16. B 17. D 18. A
19. A 20. D 21. E 22. D 23. E 24. D
25. C 26. E 27. 5 28. Sonlu kümeler
29. Ayrık kümeler 30. 32 31. 19 - 12
32. 3000 ve 3516

3.ÜNİTE: DOĞAL SAYILARDA BÖLME BÖLÜNEBİLME

ALIŞTIRMALAR (s. 95)

1. 197 2. 233, 65 3. 48 4. 0

5. 9 6. 10 7. 10 8. 8

9. a) 120, 3 b) 360, 24 c) 144, 6 ç) $2^5 \cdot 3^2 \cdot 31$, 6

10. 6 11. 33 12.1200

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME (s. 96-98)

1. A 2. D 3. C 4. C 5. E 6. B
7. D 8. A 9. E 10. C 11. E 12.C
13. B 14. D 15. C 16. E 17. C 18. A
19. C 20. A 21. D 22. 63 23. tam bölünüyor
24. aralarında asal 25. 984 26. 24
27. Ahmet Bey, Mustafa Bey ve Hatice Hanım ayın 20. günü, Ayşe Hanım ve Fatma Hanım ayın 25. günü

4.ÜNİTE: DENKLEMLER

ALIŞTIRMALAR (s. 112)

1. a) $\{x \mid -4 < x < 4, \ x \in \mathbb{R}\}$
b) $\{x \mid -2 \leq x < 3, \ x \in \mathbb{R}\}$
c) $\{x \mid -1 < x \leq 5, \ x \in \mathbb{R}\}$
ç) $\{x \mid -6 \leq x \leq 2, \ x \in \mathbb{R}\}$

2. a) $\{x \mid -2 < x < 4, \ x \in \mathbb{R}\}$
b) $\{x \mid -3 \leq x < 0, \ x \in \mathbb{R}\}$
c) $\{x \mid 2 < x \leq 6, \ x \in \mathbb{R}\}$
ç) $\{x \mid 0 \leq x \leq 8, \ x \in \mathbb{R}\}$

3. $a = -1$ ve $x = -8$

4. a) $\left\{\frac{3}{5}\right\}$ b) $\{-2\}$ c) $\left\{\frac{13}{6}\right\}$
ç) $\varnothing$ d) $\{6\}$ e) $\left\{\frac{22}{7}\right\}$

5. $-\frac{1}{3}$ 6. $\left\{-\frac{2}{7}\right\}$ 7. -2

8. 5 9. 17 10. $\{(4,8)\}$

11. $\{(2,-1)\}$ 12. 5

ALIŞTIRMALAR (s. 119)

1. a) $\{x \mid x < -4, x \in \mathbb{R}\} = (-\infty, -4)$
b) $\{x \mid x \leq 7, x \in \mathbb{R}\} = (-\infty, 7]$
c) $\{x \mid x > 3, x \in \mathbb{R}\} = (3, \infty)$
ç) $\{x \mid x > -4, x \in \mathbb{R}\} = (-4, \infty)$
d) $\{x \mid x \leq -20, x \in \mathbb{R}\} = (-\infty, -20]$
e) $\left\{x \,\middle|\, x \leq \frac{9}{4}, x \in \mathbb{R}\right\} = \left(-\infty, \frac{9}{4}\right]$

2. $\{ \ \}$ 3. $[6,12)$ 4. -5

5. En büyük değer: 32 ve En küçük değer: -19

6. En büyük değer: 5 ve En küçük değer: 1

7. 8 8. $(-2,14]$ 9. 21

10. $(1,2)$

ALIŞTIRMALAR (s. 131)

1. a) 3 b) 4 c) $\frac{1}{12}$ ç) $\frac{1}{48}$

2. $-2x+3$ 3. 10 4. 3 5. 4 6. $\left\{-\frac{2}{5}\right\}$

7. a) $\{-2,2\}$ b) $\left\{-\frac{7}{2},7\right\}$ c) $\varnothing$

ç) $\left\{-\frac{23}{3},5\right\}$ d) $\left\{-\frac{4}{3},2\right\}$ e) $\{-5,5\}$

8. $x=9$ ve $y=11$ 9. $(-5,13)$

10. $\{3\}$ 11. $\mathbb{R}-\{7\}$

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME (s. 132-134)

1. E 2. C 3. D 4. A 5. C 6. D
7. E 8. B 9. C 10. D 11. B 12. E
13. B 14. B 15. C 16. C 17. B 18. B
19. E 20. $(-3,5]$ 21. Mutlak değeri
22. $\mathbb{R}-\{2\}$ 23. $\varnothing$ 24. 35 25. 42

SÖZLÜK

B

bilinmeyen : Değeri belli olmayan, bilinmedik.
birim : Bir niceliği ölçmek için kendi cinsinden örnek seçilen değişmez parça.
bölen : Bir bölme işleminde bölünen sayının kaç eşit parçaya ayrıldığını gösteren sayı.
bölüm : Bir bölme işlemi sonucunda elde edilen sayı.
bölünen : Bir bölme işleminde eşit bölümlere ayrılması gereken sayı.

Ç

çarpan : Bir çarpma işleminde çarpılan sayının kaç kez tekrarlanacağını gösteren sayı.
çarpım : Bir çarpma işleminin sonucu olan sayı.
çevre : Düzlem üzerinde bir şekli sınırlayan çizgi.
çözüm kümesi : Bir denklemi ya da eşitsizliği sağlayan değerler kümesi.

D

değişken : Değişik sayı değerleri alabilen nicelik.
denklem : İçinde yer alan bazı niceliklere ancak uygun bir değer verildiği zaman sağlanabilen eşitlik.
denklem sistemi : İki veya daha fazla denklemin oluşturduğu sistem.

E

eleman : Kümeye ait varlıkların her biri.
eşitlik : İki veya daha fazla niceliğin birbirine eşit olduğunu ifade eden ve $=$ sembolü ile belirtilerek birbirinden ayrılan iki yanlı simgesel anlatım.
eşitsizlik : İçerisinde $<, >, \leq$ veya $\geq$ sembollerinden birisinin bulunduğu matematiksel ifade.

K

katsayı : Bir niceliğin kaç katı alındığını gösteren sayı.
küme : Birbirine benzer veya aynı cinsten olan şeylerin oluşturduğu grup.
küpkök : Küpü verilen bir sayıya eşit olan sayı.

S

sayı doğrusu : Tüm noktaları bir gerçek sayıya karşılık gelen yatay doğru.

T

tanım : Bir kavramın niteliklerini eksiksiz olarak belirtme veya açıklama.
terim : Bir bilim, sanat, meslek dalıyla veya bir konu ile ilgili özel ve belirli bir kavramı karşılayan kelime.

KAYNAKÇA

1. Türk Dil Kurumu (2012). Türkçe Sözlük. Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.
2. Türk Dil Kurumu (2012). Yazım Kılavuzu. Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.
3. Topçu, Nurettin. (2006). Mantık, (haz. E. Erverdi ve İ. Kara). Sayfa 9. İstanbul: Dergah Yayınları.
4. Gür, Bekir Sıtkı. (2005). Leibniz'in Matematik (sel) Düşüncesi. Matematik Dünyası. Güz (3). Sayfa 91-96
5. Burton, David M. (2018). Matematik Tarihi Giriş. Ondokuzuncu Yüzyıl Katkıları: Lobachevsky'dan Hilbert'e. Çeviri, Ü. Ayvaz, O. Bağdat, S. Durmuş. Yedinci Basımdan Çeviri Gözden Geçirilmiş 2. Basım. Ankara: Nobel Yaşam Yayınları.
6. Dönmez, Ali. (2005). Matematiğin Öyküsü ve Serüveni. Cilt 8, Sayfa 332-350. İstanbul: Toplumsal Dönüşüm Yayınları.
7. T.C. Milli Eğitim Bakanlığı (2020) Meslekî ve Teknik Eğitim Merkezleri Matematik Dersi 9, 10, 11 ve 12. Sınıflar Öğretim Programı.

GÖRSEL KAYNAKÇA

Görsel 1.1: http://nurettintopcuanadolu.meb.k12.tr/icerikler/nurettin-topcukimdir_8495341.html (Erişim tarihi : 11.03.2021 - 16:22)
Görsel 1.2: Görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.
Görsel 1.3: Görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.
Görsel 1.4: Görseller Freepik.com web sayfasından ücretsiz olarak indirilerek ("Designed by brgfx / Freepik", "Designed by macrovector / Freepik") görsel tasarım uzmanı tarafından düzenlenmiştir.
Görsel 2.1: http://www.cs.cmu.edu/afs/cs/academic/class/15251-f03/Site/Biographies/cantor.htm (Erişim Tarihi :14.04.2021 Erişim Saati: 19:07)
Görsel 2.2: Görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.
Görsel 2.3: Görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.
Görsel 2.4: Görseller Freepik.com web sayfasından ücretsiz olarak indirilerek ("Designed by brgfx / Freepik", "Designed by macrovector / Freepik") görsel tasarım uzmanı tarafından düzenlenmiştir.
Görsel 2.5: Görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.
Görsel 3.1: Görseller Freepik.com web sayfasından ücretsiz olarak indirilerek ("Designed by brgfx / Freepik", "Designed by macrovector / Freepik") görsel tasarım uzmanı tarafından düzenlenmiştir.
Görsel 3.2: Görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.
Görsel 3.3: Görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.
Görsel 3.4: Görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.
Görsel 3.5: Görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.
Görsel 4.1: Görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.
Görsel 4.2: Görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.
Görsel 4.3: Görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.
Görsel 4.4: Görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.
Görsel 4.5: Görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.
Görsel 4.6: Görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.

ÜNİTE KAPAK SAYFASINDA BULUNAN GÖRSEL KAYNAKÇALAR

Kitap kapak görseli : https://www.freepik.com/free-photo/school-supplies-table_2719023.htm#page=3&query=math&position=46 web sayfasından ücretsiz olarak indirilerek görsel tasarım uzmanı tarafından düzenlenmiştir.
1. Ünite kapak görseli: Görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.
2. Ünite kapak görseli: Görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.
3. Ünite kapak görseli: Freepik.com ("Designed by upklyak / Freepik", "Designed by Titusurya / Freepik") web sayfasından ücretsiz olarak indirilerek görsel tasarım uzmanı tarafından düzenlenmiştir.
4. Ünite kapak görseli: Görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.

GÖRSEL TASARIM UZMANI TARAFINDAN ÇİZİLEN ŞEKİLLERİN SAYFA NUMARALARI VE SAYILARI AŞAĞIDA VERİLMİŞTİR

16 (3 şekil)	17 (1 şekil)	18 (1 şekil)	19 (1 şekil)	21 (6 şekil)	22 (2 şekil)	23 (1 şekil)	24 (5 şekil)
25 (2 şekil)	27 (1 şekil)	28 (1 şekil)	30 (2 şekil)	34 (1 şekil)	35 (1 şekil)	37 (2 şekil)	44 (2 şekil)
49 (2 şekil)	50 (2 şekil)	53 (2 şekil)	54 (2 şekil)	55 (5 şekil)	56 (2 şekil)	57 (1 şekil)	58 (4 şekil)
59 (2 şekil)	60 (6 şekil)	62 (1 şekil)	63 (2 şekil)	64 (3 şekil)	65 (2 şekil)	66 (3 şekil)	67 (1 şekil)
68 (3 şekil)	70 (1 şekil)	72 (2 şekil)	74 (1 şekil)	76 (2 şekil)	77 (2 şekil)	79 (4 şekil)	86 (2 şekil)
87 (2 şekil)	88 (2 şekil)	89 (2 şekil)	90 (2 şekil)	91 (2 şekil)	92 (1 şekil)	93 (2 şekil)	94 (2 şekil)
98 (1 şekil)	100 (1 şekil)	101 (6 şekil)	102 (13 şekil)	112 (4 şekil)	120 (2 şekil)	121 (2 şekil)	132 (1 şekil)